

Sommes simples

1 ♡★ Montrer que la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ est strictement croissante.

2 ♡★ Calculer les sommes suivantes :

a) $S_1 = \sum_{k=0}^n i^k$ où $n \in \mathbb{N}$ et $i^2 = -1$

b) $S_2 = \sum_{k=3}^{n-1} q^k$ où $n \geq 3$ et $q \in \mathbb{C}$

c) $S_3 = \sum_{k=1}^{100} (2a^{3k+1} + 2)$ où $a \in \mathbb{C}$

d) $S_4 = \sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$ où $n \in \mathbb{N}$

e) $S_5 = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$ où $n \in \mathbb{N}$

f) $S_6 = \sum_{k=0}^n k \times k!$ où $n \in \mathbb{N}$.

g) $S_7 = \sum_{k=1}^n k(k+1)$ où $n \in \mathbb{N}^*$

h) $S_8 = \sum_{k=1}^n k(n+1-k)$ où $n \in \mathbb{N}^*$

i) $S_9 = \sum_{k=0}^n kq^k$ où $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$

j) $S_{10} = \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k}$ où $n \in \mathbb{N}$

k) $S_{11} = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

On pourra calculer $S_{11} + \sum_{k=1}^n k^2$.

l) $S_{12} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

On pourra faire apparaître une somme télescopique.

m) $S_{13} = \sum_{k=1}^n (-1)^k k$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

n) $S_{14} = \sum_{k=1}^n k 2^k$ où $n \in \mathbb{N}$.

o) $S_{15} = \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

On pourra effectuer un renversement de la somme.

p) $S_{16} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

3 ♡★ Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

a) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

b) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n u_k$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

4 ★★ On considère les polynômes :

$$P = X^2 - 2X + 1, P_0 = 1$$

$$P_1 = X + 1 \text{ et } P_2 = (X + 1)(X + 2)$$

a) Trouver trois réels α, β et γ tels que :

$$P = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2$$

b) En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^n (k-1)^2 k!$ où $n \in \mathbb{N}$.

Sommes doubles

5 ♡★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $S_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i$

b) $S_2 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i$

c) $S_3 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j)$

d) $S_4 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j)^2$

e) $S_5 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$

f) $S_6 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j|$

g) $S_7 = \sum_{l=1}^n \sum_{k=l+1}^n \frac{l}{k}$

6 ♡★ Soient $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer $S = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m \binom{n}{p} k^p$.

7 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ où a_k est le nombre entier naturel composé de k fois le chiffre 1.

Produits et factorielles

[8] ♡ Écrire l'expression suivante à l'aide de factorielles où $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$$

[9] ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

[10] ★ Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!(k+1)!}$$

[11] ★★ Soit $a \in \mathbb{C}$ et $P_n = \prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k})$ où $n \in \mathbb{N}$. Calculer P_n en considérant la quantité $(1-a)P_n$.

[12] ♡★★ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, simplifier $P_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3-1}{k^3+1}$.

[13] ★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$.

Coefficients binomiaux

[14] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme double :

$$S_n = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \binom{i}{j}$$

[15] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$A_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} \text{ et } B_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k}$$

[16] ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k} \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$$

On pourra commencer par écrire $(1+i)^{2n}$ sous forme trigonométrique.

[17] ♡★ En utilisant la fonction polynomiale $f : x \mapsto (x+1)^n$ où $x \in \mathbb{R}$, calculer :

a) $S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ où $n \geq 0$.

b) $S_2 = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ où $n \geq 1$.

c) $S_3 = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$ où $n \geq 2$.

d) $S_4 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ où $n \geq 0$.

[18] ♡★★ Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Calculer : $\sum_{i=0}^n \prod_{j=1}^p (i+j)$.

Défis

[D1] ★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq 0 \pmod{2^n \pi}$, calculer :

$$P_n = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

[D2] ★★★ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$