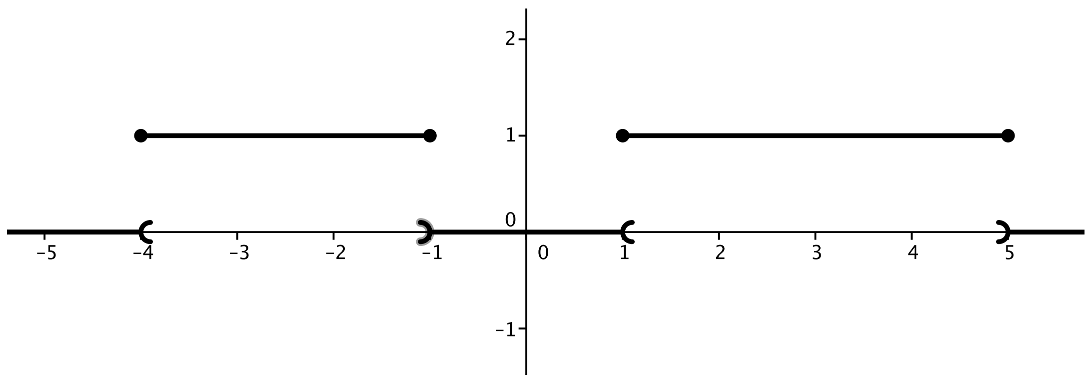
Exercice 1

1. Par définition, on a :

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-4,-1] \cup [1,5] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

D'où le graphique suivant :



2. Par définition, pour tout $x \in E$, $\mathbb{1}_E(x) = 1$, ainsi :

$$\boxed{\mathbb{1}_E \text{ est la fonction constante égale à } 1}$$

D'autre part, pour tout $x \in E$, $\mathbb{1}_\emptyset(x) = 0$:

$$\boxed{\mathbb{1}_\emptyset \text{ est la fonction constante égale à } 0}$$

3. (a) Soit $A \subset E$, la fonction $\mathbb{1}_A$ ne prend que les valeurs 0 ou 1. Ainsi pour tout $x \in E$, $\mathbb{1}_A(x)^2 = \mathbb{1}_A(x)$, ce qui permet de dire que :

$$\boxed{\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A}$$

(b) On peut traiter cette questions à l'aide d'un tableau récapitulatif, prenons A et B deux parties de E et x un élément de E :

	$x \in A$	$x \in B$	$\mathbb{1}_A(x)$	$\mathbb{1}_B(x)$
cas 1	oui	oui	1	1
cas 2	oui	non	1	0
cas 3	non	oui	0	1
cas 4	non	non	0	0

On a :

$$A \subset B \Leftrightarrow \text{on se trouve dans les cas 1, 3 ou 4 } \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$$

$$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B}$$

Il y a bien entendu d'autres façon de rédiger cette question sans l'aide de ce tableau et en traitant les différents cas possibles.

(c) On utilise la question précédente, soient A et B deux parties de E :

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B \text{ et } \mathbb{1}_B \leq \mathbb{1}_A \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$$

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B}$$

(d) Là aussi un tableau résumant les différents cas fait l'affaire. Soient A et B deux parties de E et $x \in E$:

$x \in A$	$x \in \bar{A}$	$\mathbb{1}_A(x)$	$\mathbb{1}_{\bar{A}}(x)$
oui	non	1	0
non	oui	0	1

Il est clair que : $\forall x \in E,\ \mathbb{1}_{\bar{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$.

$$\boxed{\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A}$$

(e) On emploie la même méthode avec A et B deux parties de E et $x \in E$:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$	$\mathbb{1}_A(x)$	$\mathbb{1}_B(x)$	$\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$	$\mathbb{1}_{A \cap B}(x)$
oui	oui	oui	1	1	1	1
oui	non	non	1	0	0	0
non	oui	non	0	1	0	0
non	non	non	0	0	0	0

On constate que : $\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_{A \cap B}(x)$, ainsi :

$$\boxed{\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}}$$

(f) Voici le tableau correspondant à la situation avec A et B deux parties de E et $x \in E$:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$	$\mathbb{1}_A(x)$	$\mathbb{1}_B(x)$	$\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$	$\mathbb{1}_{A \cup B}(x)$
oui	oui	oui	1	1	$1 + 1 - 1 = 1$	1
oui	non	oui	1	0	$1 + 0 - 0 = 1$	1
non	oui	oui	0	1	$0 + 1 - 0 = 1$	1
non	non	non	0	0	$0 + 0 - 0 = 0$	0

Ce qui démontre que :

$$\boxed{\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cup B}}$$

(g) On a vu dans le cours que pour toutes parties X et Y de E, on a $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$. Considérons A et B deux parties de E, on a :

$$\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_{A \cap \bar{B}} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\bar{B}} = \mathbb{1}_A (1 - \mathbb{1}_B)$$

Ceci en utilisant les formules démontrées aux questions 3.(d) et 3.(e).

$$\boxed{\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A (1 - \mathbb{1}_B)}$$

4. (a) On a :

$$\begin{array}{rcll}
A\Delta B & = & (A\cup B)\setminus(B\cap A) & \\
 & = & (A\cup B)\cap\left(\overline{B\cap A}\right) & \\
 & = & (A\cup B)\cap(\bar{B}\cup\bar{A}) & \\
 & = & [A\cap(\bar{B}\cup\bar{A})]\cup[B\cap(\bar{B}\cup\bar{A})] & \text{en distribuant} \\
 & = & [(A\cap\bar{B})\cup(A\cap\bar{A})]\cup[(B\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})] & \text{or } A\cap\bar{A}=\emptyset \text{ et } B\cap\bar{B}=\emptyset \\
 & = & (A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A}) & \\
 & = & (A\setminus B)\cup(B\setminus A) &
\end{array}$$

Ce qui démontre que :

$$\boxed{\forall (A,B)\in\mathcal{P}(E)^2,\ A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)}$$

(b) Soit A une partie de E, en utilisant la définition, on a :

$$A\Delta E=(A\cup E)\setminus(A\cap E)=E\setminus A=\bar{A}$$

et :

$$A\Delta\emptyset=(A\cup\emptyset)\setminus(A\cap\emptyset)=A\setminus\emptyset=A$$

$$\boxed{\forall A\in\mathcal{P}(E),\ A\Delta E=\bar{A}\text{ et } A\Delta\emptyset=A}$$

(c) La formule $A\Delta B=(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})$ a été démontrée au cours de la question 4.(a). En utilisant cette égalité, on a pour toutes parties A et$B$ de E :

$$\bar{A}\Delta\bar{B}=(\bar{A}\cap\bar{\bar{B}})\cup(\bar{B}\cap\bar{\bar{A}})=(\bar{A}\cap B)\cup(\bar{B}\cap A)=A\Delta B$$

$$\boxed{\forall (A,B)\in\mathcal{P}(E)^2,\ \bar{A}\Delta\bar{B}=A\Delta B}$$

(d) On va utiliser les différents résultats de la question 3. :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{1}_{A\Delta B} & = & \mathbb{1}_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} & \text{définition de la différence symétrique} \\
 & = & (\mathbb{1}_{A\cup B})(1-\mathbb{1}_{A\cap B}) & \text{avec 3.(g)} \\
 & = & (\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)(1-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B) & \text{en utilisant 3.(e) et 3.(f)} \\
 & = & \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_B\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B & \text{en développant} \\
 & = & \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\times\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B & \text{en utilisant 3.(a)} \\
 & = & (\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B)^2 &
\end{array}$$

Ce qui démontre que :

$$\boxed{\forall (A,B)\in\mathcal{P}(E)^2,\ \mathbb{1}_{A\Delta B}=(\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B)^2}$$

(e) Soient A, B et C trois parties de E. D'après la question 3.(c) deux ensembles sont égaux si et seulement si leurs fonctions caractéristiques sont égales, il s'agit donc de montrer que $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}=\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$. Pour cela, on va bien entendu se servir de la formule démontrée à la question précédente :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{1}_{A\Delta B\Delta C} & = & (\mathbb{1}_{(A\Delta B)}-\mathbb{1}_C)^2 \\
 & = & \left((\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B)^2-\mathbb{1}_C\right)^2 \\
 & = & (\mathbb{1}_A^2+\mathbb{1}_B^2-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_C)^2 \\
 & = & (\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_C)^2 \\
 & = & \mathbb{1}_A^2+\mathbb{1}_B^2+4\mathbb{1}_A^2\mathbb{1}_B^2+\mathbb{1}_C^2+2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-4\mathbb{1}_B\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C+4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C \\
 & = & \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C+4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C
\end{array}$$

D'autre part :

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} & = & (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{B\Delta C})^2 \\
 & = & \Big(\mathbb{1}_A - (\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C)\Big)^2 \\
 & = & (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B^2 - \mathbb{1}_C^2 + 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C)^2 \\
 & = & (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C + 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C)^2 \\
 & = & \mathbb{1}_A^2 + \mathbb{1}_B^2 + \mathbb{1}_C^2 + 4\mathbb{1}_B^2\mathbb{1}_C^2 - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C - 4\mathbb{1}_B^2\mathbb{1}_C - 4\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C^2 \\
 & = & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C
\end{array}
$$

Dans ces calculs, on a utilisé systématiquement que $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B^2 = \mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C^2 = \mathbb{1}_C$.
On a bien $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = \mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$ et par suite :

$$\boxed{\text{La différence symétrique est associative}}$$

Cette question illustre l'importance de la la fonction caractéristique qui permet de démontrer une propriété sur les ensembles juste par un calcul algébrique.

5. Démontrons la surjectivité de Γ puis son injectivité.
► Soit $f \in \mathcal{F}(E, \{0,1\})$, trouvons-lui un antécédent par Γ. On pose $A = f^{-1}(\{1\})$, c'est bien une partie de E et on a pour tout $x \in E$:

$$\Gamma(A)(x) = 1 \Leftrightarrow \underline{\mathbb{1}_A(x) = 1} \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\{1\}) \Leftrightarrow \underline{f(x) = 1}$$

Les assertions soulignées montrent que $\mathbb{1}_A = f$ puisque $\mathbb{1}_A$ et f sont à valeurs dans $\{0,1\}$.
On a trouvé un antécédent à f par Γ, c'est A.
► Prenons A et B deux parties de E et supposons que $\Gamma(A) = \Gamma(B)$, c'est-à-dire que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ et d'après la question 3.(c) cela donne $A = B$. Ce qui démontre que f est injective.

$$\boxed{\Gamma \text{ est une bijection}}$$

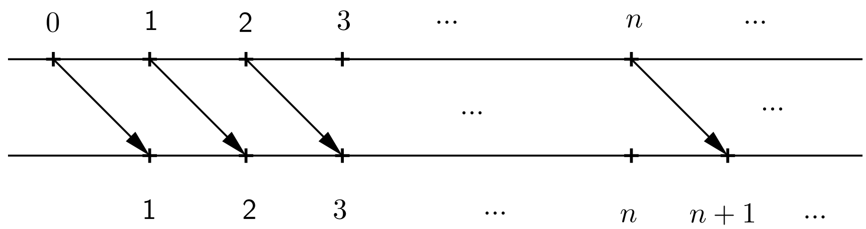
6. ► Soit B une partie de F. Soit $x \in f^{-1}(B)$, on a $f(x) \in B$. Ainsi dans ce cas $\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}(x) = 1$ et $\mathbb{1}_B \circ f(x) = \mathbb{1}_B(f(x)) = 1$.
► Soit $x \notin f^{-1}(B)$, on a $f(x) \notin B$. Ainsi dans ce cas $\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}(x) = 0$ et $\mathbb{1}_B \circ f(x) = \mathbb{1}_B(f(x)) = 0$.
Dans les deux cas, les fonctions $\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}$ et $\mathbb{1}_B \circ f$ coïncident

$$\boxed{\mathbb{1}_{f^{-1}(B)} = \mathbb{1}_B \circ f}$$

Exercice 2

1. La bijection la plus simple entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ est :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_1 & : & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}^* \\ & & n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

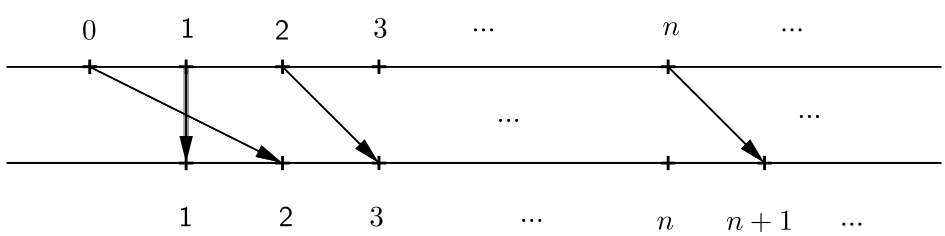


Pour démontrer que φ est une bijection, on pourrait démontrer qu'elle est injective et surjective ou, plus simplement, donner sa bijection réciproque :

$$\begin{array}{rccl} \psi_1 & : & \mathbb{N}^* & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & & n & \mapsto & n-1 \end{array}$$

On a bien $\varphi_1 \circ \psi_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^*}$ et $\psi_1 \circ \varphi_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
Voici une autre bijection :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_2 & : & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}^* \\ & & n & \mapsto & \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad n \notin \{0,1\} \\ 2 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \end{cases} \end{array}$$



Sa bijection réciproque est :

$$\begin{array}{rccl} \psi_2 & : & \mathbb{N}^* & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & & n & \mapsto & \begin{cases} n-1 & \text{si} \quad n \notin \{1,2\} \\ 0 & \text{si} \quad n = 2 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \end{cases} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{N} \text{ est en bijection avec } \mathbb{N}^*}$$

2. Il est ici moins facile de trouver directement la bijection réciproque de f. Montrons qu'elle est injective puis surjective. Dans la démonstration, on va utiliser que n est pair si et seulement si $f(n) \geq 0$ et n est impair si et seulement si $f(n) < 0$.
► *Injectivité*. Soient n et n' deux entiers naturels tels que $f(n) = f(n')$, démontrons que $n = n'$. Étant donné que $f(n) = f(n')$, d'après la remarque préliminaire, il est nécessaire que n et n' aient la même parité.

- Si n et n' sont pairs alors $f(n) = f(n') \Leftrightarrow \dfrac{n}{2} = \dfrac{n'}{2} \Leftrightarrow n = n'$.
- Si n et n' sont impairs alors $f(n) = f(n') \Leftrightarrow -\dfrac{n+1}{2} = -\dfrac{n'+1}{2} \Leftrightarrow n = n'$.

Ce qui démontre que f est injective.

► *Surjectivité*. Soit $n \in \mathbb{Z}$, trouvons-lui un antécédent par f.

- Si $n \geq 0$, on $f(2n) = n$ ainsi $2n$ est un antécédent de n par f.
- Si $n < 0$, on a $f(-1-2n) = -\dfrac{(-1-2n)+1}{2} = n$ ainsi $-1-2n$ est un antécédent de n par f.

Remarquons que cet antécédent est bien un entier naturel car $n < 0$ donc $n \leq -1$ puisque n est un entier et par suite $-1-2n \geq 0$.

Ainsi f est une bijection et aussi surprenant que cela puisse paraître :

$$\boxed{\mathbb{N} \text{ est en bijection avec } \mathbb{Z}}$$

Au cours de cette question, on a d'ailleurs trouvé la bijection réciproque de f, c'est :

$$\begin{array}{rccl} f^{-1} & : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ & & n & \mapsto & \begin{cases} 2n & si \quad n \geq 0 \\ -1-2n & si \quad n \leq -1 \end{cases} \end{array}$$

3. (a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, tentons de l'écrire sous la forme demandée.

► Si $m = 1$, on a : $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$ ainsi choisir $k = 0$ et $n = 0$ convient.

► Si $m \geq 2$, on a déjà vu en cours que m peut s'écrire comme un produit de facteurs premiers. C'est-à-dire qu'il existe des nombres premiers impairs p_1, p_2,..., p_r et des entiers naturels k, a_1, a_2,..., a_r avec $r \in \mathbb{N}$ tels que :

$$m = 2^k p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$$

Notons que k peut être éventuellement nul dans le cas où m est un entier impair. Le produit $p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$ est un entier impair puisque les nombres premiers mis en jeu sont impairs donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r} = 2n+1$. Finalement, on a bien $m = 2^k(2n+1)$.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \exists (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ m = 2^k(2n+1)}$$

Vous pouvez, en guise d'exercice, démontrer ce résultat par récurrence forte.

(b) Soit $m \in \mathbb{N}$ trouvons-lui un antécédent par g. On a $m+1 \in \mathbb{N}^*$ on peut donc appliquer le résultat de la question précédente à $m+1$, il existe $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m+1 = 2^k(2n+1)$ ou encore $m = 2^k(2n+1) - 1$. C'est-à-dire $g(k,n) = m$.

$$\boxed{g \text{ est surjective}}$$

(c) Donnons-nous $(k, k', n, n') \in \mathbb{N}^4$ et supposons que $g(k,n) = g(k',n')$, c'est-à-dire :

$$2^k(2n+1) = 2^{k'}(2n'+1) \quad (\bigstar)$$

Considérons plusieurs cas :

► si $k > k'$, on divise l'égalité par $2^{k'}$ ce qui donne $2^{k-k'}(2n+1) = 2n'+1$. Ceci est absurde puisque le membre de gauche est pair et le membre de droite est impair.

► si $k' > k$, on divise l'égalité par 2^k ce qui donne $2n+1 = 2^{k'-k}(2n'+1)$. Ceci est absurde puisque le membre de gauche est impair et le membre de droite est pair.

Nécessairement $k = k'$ et en divisant l'égalité ($\bigstar$) par 2^k, on obtient $2n+1 = 2n'+1$ d'où $n = n'$. Finalement $(k,n) = (k',n')$.

$$\boxed{g \text{ est injective}}$$

(d) La fonction g est surjective d'après la question 3.(b) et injective d'après la question 3.(c).

$$\boxed{g \text{ est une bijection de } \mathbb{N}^2 \text{ dans } \mathbb{N}}$$

4. Considérons l'hypothèse de récurrence suivante valable pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{H}_p \ : \ \text{"il existe une bijection entre } \mathbb{N}^p \text{ et } \mathbb{N}\text{"}$$

► *Initialisation.* Pour $p = 1$, le résultat est évident puisque pour la bijection en question on peut choisir l'identité. Remarquons d'ailleurs que la question 3. démontre que $\mathcal{H}_2$ est vraie.

► *Hérédité.* Fixons $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons avoir trouvé une bijection φ_p entre $\mathbb{N}^p$ et $\mathbb{N}$ et démontrons qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}^{p+1}$ et $\mathbb{N}$. On pose :

$$\varphi_{p+1} \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^{p+1} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (n_1, n_2, ..., n_{p+1}) & \mapsto & g(\varphi_p(n_1, ..., n_p), n_{p+1}) \end{array}$$

Il reste à démontrer que φ_{p+1} est bien une bijection.

Injectivité. Supposons que $\varphi_{p+1}(n_1, n_2, ..., n_{p+1}) = \varphi_{p+1}(n'_1, n'_2, ..., n'_{p+1})$ avec $(n_i)_{1 \leq i \leq p+1} \in \mathbb{N}^{p+1}$ et $(n'_i)_{1 \leq i \leq p+1} \in \mathbb{N}^{p+1}$. On a :

$$g(\varphi_p(n_1, ..., n_p), n_{p+1}) = g(\varphi_p(n'_1, ..., n'_p), n'_{p+1})$$

L'application g est injective, ainsi l'égalité précédente implique que : $\varphi_p(n_1, ..., n_p) = \varphi_p(n'_1, ..., n'_p)$ et $n_{p+1} = n'_{p+1}$. De plus, par hypothèse de récurrence, φ_p est injective donc $n_1 = n'_1$, $n_2 = n'_2$,..., $n_p = n'_p$. Finalement :

$$\forall i \in [\![1, p+1]\!], \ n_i = n'_i$$

Ce qui démontre l'injectivité.

Surjectivité. Soit $m \in \mathbb{N}$, trouvons-lui un antécédent par φ_{p+1}. Déjà, on sait, d'après la question 3. que g est surjective, c'est-à-dire qu'il existe $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $g(k,n) = m$. D'autre part φ_p est surjective donc il existe $(n_1, ..., n_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $\varphi_p(n_1, ..., n_p) = k$. On a :

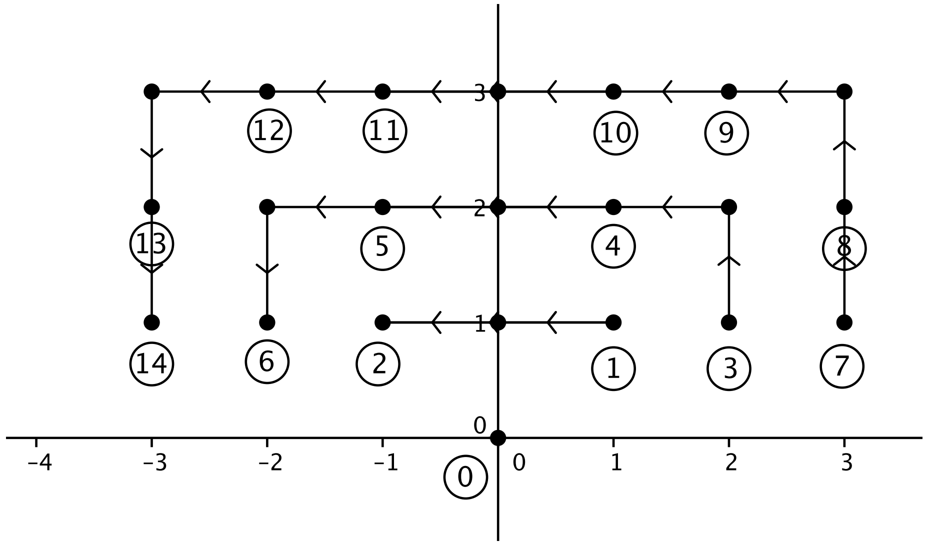
$$\varphi_{p+1}(n_1, n_2, ..., n_p, n) = g(\varphi_p(n_1, ..., n_p), n) = g(k,n) = m$$

L'application φ_{p+1} est bien surjective.

Finalement l'application φ_{p+1} est une bijection de $\mathbb{N}^{p+1}$ dans $\mathbb{N}$, ce qui démontre que $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie et achève la récurrence.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{N}^p \text{ est en bijection avec } \mathbb{N}}$$

5. Trouver une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ revient à trouver une façon de compter les éléments de $\mathbb{Q}$. Le schéma suivant explique comment faire :



Le point de coordonnées (p, q) correspond au rationnel $\dfrac{p}{q}$ où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. On numérote les points comme indiqué sur le dessin, on saute les rationnels que l'on a déjà pris en compte. Ainsi on définit $\varphi \ : \ \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ une bijection. Par exemple $\varphi(10) = \dfrac{1}{3}$ car 10 correspond au point de coordonnées $(1, 3)$ sur le dessin. Le point $(3, 3)$, par exemple, n'a pas de numéro (c'est-à-dire d'antécédent par φ) car $\dfrac{3}{3} = \dfrac{1}{1}$ que l'on a déjà compté précédemment. Ceci explique que φ est injective, une même fraction n'ayant pas deux numéros. La fonction φ est bien surjective puisque si $r \in \mathbb{Q}$ avec $r = \dfrac{p}{q}$ et p et q premiers entre eux, le point de coordonnées (p, q) aura un numéro.

$$\boxed{\mathbb{N} \text{ est en bijection avec } \mathbb{Q}}$$

6. (a) On considère le réel au milieu du segment $[a, b]$: $c = \dfrac{a+b}{2}$. On considère également le réel qui se place au tiers de ce segment : $d = a + \dfrac{b-a}{3}$. Il y a deux cas :
   - si $x < c$, on peut poser $a' = c$ et $b' = b$.
   - si $x \geq c$, on peut poser $a' = a$ et $b' = d$.

   Pour comprendre ce raisonnement, il ne faut pas hésiter à faire un dessin.

   (b) Un tel choix est possible, c'est la question précédente avec $x = \varphi(n)$, $a = a_n$, $b = b_n$, $a' = a_{n+1}$ et $b' = b_{n+1}$.

   (c) D'après la question précédente et par construction des suites, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_0 \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b_0$$

   Ceci montre que la suite (a_n) est croissante et majorée par b_0 et que la suite (b_n) est décroissante et minorée par a_0. D'après le théorème de la limite monotone ces deux suites convergent.

   (d) Déjà pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leq b_n$ en passant à la limite dans cette inégalité, cela donne $\lambda \leq \mu$. D'autre part, (a_n) étant une suite croissante et convergente, tous les termes de la suite sont inférieurs à la limite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n \leq \lambda$$

   Même raisonnement pour (b_n) qui est décroissante et qui tend vers μ, ce qui permet d'affirmer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mu \leq b_n$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq \lambda \leq \mu \leq b_n}$$

(e) Comme l'application φ est une bijection, le réel λ possède un antécédent que l'on note $p \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $\varphi(p) = \lambda$. Par définition des suites, nous avons $\varphi(p) \notin [a_{p+1}, b_{p+1}]$, ce qui donne $\lambda \notin [a_{p+1}, b_{p+1}]$. C'est contradictoire avec la question précédente.

$$\boxed{\mathbb{N} \text{ et } \mathbb{R} \text{ ne sont pas en bijection}}$$

7. L'application f appartient à $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ ainsi elle possède un antécédent par φ qui est une bijection. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(p) = f$. On examine la valeur de $f(p)$:

$$\varphi(p)(p) = f(p) = \varphi(p)(p) + 1$$

c'est clairement absurde.

$$\boxed{\mathbb{N} \text{ et } \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \text{ ne sont pas en bijection}}$$