1-Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=4}^{n+3}(2k+1)$.

2-Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1}$.

3-Simplifier $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} 2$.

4-Calculer $S = \sum_{k=1}^{100}(2a^{3k+1}+2)$ où $a \in \mathbb{R}$.

5-Factoriser $a^5 + b^5$.

6-★ Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 7 | (8^n - 1)$$

On pourra proposer 3 preuves différentes.

1-Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+3}(2k+1)$.

Réponse : On reconnait la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2, le premier terme est 9 et le dernier vaut $2n+7$. Le nombre de termes est n, d'où :

$$\sum_{k=4}^{n+3}(2k+1) = \frac{(9+2n+7)\times n}{2} = \underline{(n+8)n}$$

2-Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1}$.

Réponse : On fait apparaitre la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} 9^k = \frac{1}{3} \times 9 \times \frac{9^n - 1}{9 - 1} = \underline{\frac{3}{8}(9^n - 1)}$$

3-Simplifier $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} 2$.

Réponse : On a :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} 2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2n = \sum_{i=1}^{n} 2n^2 = 2n^3$$

4-Calculer $S = \sum_{k=1}^{100} (2a^{3k+1} + 2)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Réponse : Si $a = 1$, on a :

$$S = \sum_{k=1}^{100} 4 = 400$$

Si $a \neq 1$, on a :

$$S = 2a \sum_{k=1}^{100} (a^3)^k + \sum_{k=1}^{100} 2 = 2a \times a^3 \frac{(a^3)^{100} - 1}{a^3 - 1} + 200 = 2a^4 \frac{a^{300} - 1}{a^3 - 1} + 200$$

5-Factoriser $a^5 + b^5$.

Réponse : D'après la formule $a^n - b^n$, on a : $a^5 + b^5$

$$\begin{aligned} &= a^5 - (-b)^5 \\ &= (a+b)(a^4 + a^3(-b) + a^2(-b)^2 + a(-b)^3 + (-b)^4) \\ &= (a+b)(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4) \end{aligned}$$

6-Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 7|8^n - 1$.

Réponse : i) Avec des congruences.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$8^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0\ [7]$$

donc $7|8^n - 1$

ii) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{H}_n \ : \ 7|8^n - 1$$

• Initialisation. Pour $n = 0$, on a bien $7|0$.

• Hérédité. On suppose que $7|8^n - 1$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $7k = 8^n - 1$. On multiplie par 8 pour obtenir $7 \times (8k) = 8^{n+1} - 8$ ou encore $7 \times (8k + 1) = 8^{n+1} - 1$. Ce qui nous donne bien $7|8^{n+1} - 1$.

Ce qui termine la récurrence.

iii) Avec la formule $a^n - b^n$.

On a :

$$8^n - 1 = 8^n - 1^n = (8-1)\sum_{k=0}^{n-1} 8^k 1^{n-1-k}$$

C'est-à-dire :

$$8^n - 1 = 7\sum_{k=0}^{n-1} 8^k$$

La somme étant un nombre entier, on a bien $7 | 8^n - 1$.