1-Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0,1\}$$

2-Donner les valeurs possibles de $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3-Donner une expression de $\lfloor -x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$ où $x \in \mathbb{R}$.

4-Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$?

5-Déterminer : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{2} \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor$.

6-Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \text{ et } b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

Démontrer que (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.

1-Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0,1\}$$

Réponse : Soit $x \in \mathbb{R}$, on procède par encadrements :

$$2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leq 2x \text{ et } x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

On multiplie la deuxième inégalité par -2 :

$$-2x \leq -2\lfloor x \rfloor < -2x + 2$$

En sommant :

$$-1 < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 2$$

Or $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0,1\}$.

2-Donner les valeurs possibles de $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse : Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \text{ et } \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$$

En sommant ces inégalités, il vient :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$$

On en déduit que :

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \text{ ou } \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

3-Donner une expression de $\lfloor -x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$ où $x \in \mathbb{R}$.

Réponse : Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \Leftrightarrow -\lfloor x \rfloor - 1 < -x \leq -\lfloor x \rfloor$$

Deux cas se présentent : si $x = \lfloor x \rfloor$, c'est-à-dire si x est un entier alors $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$ d'après l'inégalité précédente. Sinon $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$.
Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

4-Que vaut $\lim_{n \to +\infty} n^3 \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$?

Réponse : Pour tout $n \geq 2$, on a : $\left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = 0$ donc la suite $\left(n^3 \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor\right)$ vaut 0 à partir du rang 2. Elle tend vers 0.

5-Déterminer : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{2} \left\lfloor \dfrac{3}{x} \right\rfloor$.

Réponse : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\frac{3}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{3}{x}$$

On multiplie par $\dfrac{x}{2} > 0$:

$$\frac{3}{2} - \frac{x}{2} < \frac{x}{2} \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{3}{2}$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{2} \left\lfloor \dfrac{3}{x} \right\rfloor = \dfrac{3}{2}$.

6-Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \text{ et } b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

Démontrer que (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.

Réponse : Soit $n \in \mathbb{N}$, en réduisant au même dénominateur, on a :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\lfloor 10^{n+1} x \rfloor - 10\lfloor 10^n x \rfloor}{10^{n+1}}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{\lfloor 10^{n+1} x \rfloor - 10\lfloor 10^n x \rfloor - 9}{10^{n+1}}$$

Il s'agit donc d'étudier l'expression : $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor - 10\lfloor 10^n x \rfloor$. On procède par encadrement.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$10^{n+1}x - 1 < \lfloor 10^{n+1}x \rfloor \leq 10^{n+1}x \qquad (1)$$

D'autre part,

$$10^{n}x - 1 < \lfloor 10^{n}x \rfloor \leq 10^{n}x$$

donc :

$$-10^{n+1}x \leq -10\lfloor 10^{n}x \rfloor < 10 - 10^{n+1}x \qquad (2)$$

On somme (1) et (2) pour obtenir :

$$-1 < \lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10\lfloor 10^{n}x \rfloor < 10$$

et comme $\lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10\lfloor 10^{n}x \rfloor \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$0 \leq \lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10\lfloor 10^{n}x \rfloor \leq 9$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \text{ et } b_{n+1} - b_n \leq 0$$

Ainsi (a_n) croit et (b_n) décroit.