1-Expliciter $\exp(\mathbb{R}^*)$.

2-Expliciter $f^{-1}(]4,5] \cup \{-3,1\})$ où $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

3-On considère la fonction $f = cos$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Décrire à l'aide du symbole $\bigcup$ l'ensemble $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

4-Trouver un exemple de fonction $f : E \to F$ et de partie A de E pour lesquelles $f(\complement_E A)$ et $\complement_F f(A)$ sont distincts.

5-Soit $f : E \to F$ une application et B une partie de F. Est-il vrai que $f^{-1}(B) = \emptyset$ implique $B = \emptyset$?

6-Soit $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Expliciter $f(f^{-1}(f([0,2])))$ et $f^{-1}(f(f^{-1}(]-1,4[)))$.

7-Soit $f : E \to F$ et $B \subset F$. Montrer que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

1-Expliciter $\exp(\mathbb{R}^*)$.

Réponse : C'est l'ensemble des images par la fonction exponentielle des réels de $\mathbb{R}^*$. On a :

$$\exp(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

2-Expliciter $f^{-1}(]4,5] \cup \{-3,1\})$ où $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Réponse : C'est l'ensemble des antécédents par la fonction carrée des éléments de l'ensemble $]4,5] \cup \{-3,1\}$. On a :

$$f^{-1}(]4,5] \cup \{-3,1\}) = [-\sqrt{5}, -2[\cup]2, \sqrt{5}] \cup \{-1,1\}$$

3-On considère la fonction $f = cos$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Décrire à l'aide du symbole $\bigcup$ l'ensemble $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

Réponse : L'ensemble $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est l'ensemble des réels dont le cosinus est positif. C'est-à-dire que :

$$f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$$

4-Trouver un exemple de fonction $f : E \to F$ et de partie A de E pour lesquelles $f(\complement_E A)$ et $\complement_F f(A)$ sont distincts.

Réponse : On peut prendre la fonction carrée définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $A = \mathbb{R}_+$. On a :

$$f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$$

et

$$f(\mathbb{R}_-^*) = \mathbb{R}_+^*$$

Ainsi : $f(\complement_\mathbb{R} \mathbb{R}_+)$ et $\complement_\mathbb{R} f(\mathbb{R}_+)$ sont distincts.

5-Soit $f : E \to F$ une application et B une partie de F. Est-il vrai que $f^{-1}(B) = \emptyset$ implique $B = \emptyset$?

Réponse : C'est faux en général. Si l'on prend une application non surjective et y un élément de F qui n'a pas d'antécédent alors $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ mais $\{y\} \neq \emptyset$.

6-Soit $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Expliciter $f(f^{-1}(f([0,2])))$ et $f^{-1}(f(f^{-1}(]-1,4[)))$.

Réponse : On a :

$$f(f^{-1}(f([0,2]))) = f(f^{-1}([0,4])) = f([-2,2]) = [0,4]$$

$$f^{-1}(f(f^{-1}(]-1,4[))) = f^{-1}(f(]-2,2[)) = f^{-1}([0,4[) =]-2,2[$$

7-Soit $f : E \to F$ et $B \subset F$. Montrer que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

Réponse : On a toujours $f(f^{-1}(B)) \subset B$ comme nous l'avons vu en exercice. D'autre part, $f^{-1}(B) \subset E$ donc $f(f^{-1}(B)) \subset f(E)$. Finalement :

$$f(f^{-1}(B)) \subset B \cap f(E)$$

Pour l'autre inclusion, prenons $y \in B \cap f(E)$. Comme $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a $x \in f^{-1}(B)$ car $f(x) = y \in B$. Finalement, $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Ce qui démontre $B \cap f(E) \subset f(f^{-1}(B))$.

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$$