1-On considère l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la multiplication modulo 5. Donner la table de loi. Quel est le neutre ? Tout élément a t-il un inverse ? Est-ce un groupe ?

2-Soit $(G, \star)$ un groupe et $a \in G$. Montrer que l'application $f : x \mapsto a \star x$ est une bijection de G dans G.

1-On considère l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la multiplication modulo 5. Donner la table de loi. Quel est le neutre ? Tout élément a t-il un inverse ? Est-ce un groupe ?

Réponse : Cette loi est commutative et associative, voici la table :

$\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

1 est l'élément neutre, c'est son propre inverse. On a : $2 \times 3 = 1$ donc 2 a pour inverse 3 et 3 a pour inverse 2. Enfin $4 \times 4 = 1$ ainsi 4 est inversible et son inverse est 4. Tout élément à un inverse.
Toutes les propriétés pour avoir un groupe sont réunies.

2-Soit $(G, \star)$ un groupe et $a \in G$. Montrer que l'application $f : x \mapsto a \star x$ est une bijection de G dans G.

Réponse : L'application $g : x \mapsto a^{-1} \star x$ définie de G dans G est la bijection réciproque de f. En effet pour $x \in G$, on a :

$$f(g(x)) = f(a^{-1} \star x) = a \star a^{-1} \star x = x$$

$$g(f(x)) = g(a \star x) = a^{-1} \star a \star x = x$$

Ceci démontre que f est bijective et $f^{-1} = g$.