Dérivabilité - Calculs de dérivées

1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux façons la dérivée n-ième de $x \mapsto x^{2n}$. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin(x)$.
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$$

3 ♡ Calculer la dérivée n-ième de $g : x \mapsto (x^2+1)e^x$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4 ♡★ Donner l'ensemble de définition et étudier la dérivabilité de :
a) $x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$
b) $x \mapsto (x^2-1)\mathrm{Arccos}(x^2)$
c) $x \mapsto x|x|$
d) $x \mapsto \dfrac{x}{|x|+1}$

5 ★★ Soit f définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
a) Démontrer que :

$$\forall x \in [0,1[,\ (1-x^2)f'(x) = xf(x)$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, dériver n fois la relation précédente.
c) En déduire que :

$$\forall x \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) \geq 0$$

6 ♡★★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée n-ième de :

$$g : t \mapsto t^{n-1}\ln(t)$$

7 ★★★ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0 et vérifiant $f(0) = 0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$, en déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Théorème de Rolle

8 ★ Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Montrer que si pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f^{(i)}(a) = 0$ et $f(b) = 0$ alors il existe $c \in]a,b]$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

9 ★★ Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que : $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a+b+c$.

10 ♡★★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

11 ★★ Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$$

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

12 ★★ (Règle de L'Hôpital) Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que :

$$\forall x \in [a,b],\ g'(x) \neq 0$$

a) Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
b) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

13 ♡★★ Soit P une fonction polynomiale, montrer que l'équation $P(x) = e^x$ a un nombre fini de solutions sur $\mathbb{R}$.

Théorème des accroissements finis

14 ★ Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

15 ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Montrer que :

$$\forall x > 0,\ \exists c > 0,\ f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$$

16 ♡★★ À l'aide du théorème des accroissements finis déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty} \left((x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$$

18 ♡★★ Soit $f : x \mapsto \sqrt{x\mathrm{Arcsin}(x)}$.
a) Donner l'ensemble de définition de f.
b) Étudier la dérivabilité de f.

19 ★★ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, a+2h]$. Montrer qu'il existe $c \in]a, a+2h[$ tel que :

$$f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c)$$

Défis

D1 ★★★ Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ vérifiant $f \circ f = f$.

D2 ★★★ Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) + f'(x) = l \in \mathbb{R}$$

Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

D3 ★★★★ (Théorème de Darboux). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle.