

- 1-Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Quelle est la définition de f continue en a ?
- 2-La fonction $x \mapsto \frac{1}{x-3}$ est-elle continue au point 3 ?
- 3-La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \text{ch}(x)$ si $x \geq 0$ et $f(x) = \cos(x)$ si $x < 0$ est-elle continue en 0 ?
- 4-La fonction Arccos est-elle continue en -1 ?
- 5-Existe t-il des fonctions dérivables sur \mathbb{R} mais non continues ?
- 6-Connaissez-vous une fonction discontinue en tout réel ?
- 7-Vrai ou faux : les fonctions ayant des primitives sont continues.
- 8-Que dire d'une fonction continue sur \mathbb{R} ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ?
- 9-Trouver une fonction définie sur \mathbb{R} , continue en 0 et discontinue en tout point de \mathbb{R}^* .

1-Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Quelle est la définition de f continue en a ?

Réponse : La fonction f est continue en a si et seulement si
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

2-La fonction $x \mapsto \frac{1}{x-3}$ est-elle continue au point 3 ?

Réponse : La fonction f n'est pas définie au point 3 et la question de la continuité ne se pose qu'en un point de l'ensemble de définition de f .

3-La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \text{ch}(x)$ si $x \geq 0$ et $f(x) = \cos(x)$ si $x < 0$ est-elle continue en 0 ?

Réponse : C'est bien le cas car :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos(x) = 1 = f(0)$$

et :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{ch}(x) = 1 = f(0)$$

4-La fonction Arccos est-elle continue en -1 ?

Réponse : La fonction Arccos est continue sur $[-1, 1]$ en tant que bijection réciproque de $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ qui est continue.

5-Existe t-il des fonctions dérivables sur \mathbb{R} mais non continues ?

Réponse : Il n'en existe pas, une fonction dérivable est toujours continue.

6-Connaissez-vous une fonction discontinue en tout réel ?

Réponse : La fonction indicatrice de \mathbb{Q} .

7-Vrai ou faux : les fonctions ayant des primitives sont continues.

Réponse : Nous avons dit en cours que les fonctions continues possèdent des primitives. Nous n'avons pas encore étudié la réciproque (et nous verrons qu'elle est fausse).

8-Que dire d'une fonction continue sur \mathbb{R} ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ?

Réponse : Une telle fonction est nécessairement constante. En effet, si par l'absurde f prend deux valeurs différentes $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ alors f prend toutes les valeurs intermédiaires entre a et b . Ceci est absurde car il y a une infinité de valeurs entre a et b .

9-Trouver une fonction définie sur \mathbb{R} , continue en 0 et discontinue en tout point de \mathbb{R}^* .

Réponse : Nous verrons que $x \mapsto x1_{\mathbb{Q}}$ convient.