1. Simplifier $\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{12}-\dfrac{3}{16}$.

   Corrigé. On a :

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{12}-\frac{3}{16}=\frac{72+20-9}{48}=\frac{83}{48}$$

$$\boxed{\frac{83}{48}}$$

---

2. Soit $A=\dfrac{2}{2\sqrt{3}-4}$, écrire A sous la forme $a+b\sqrt{3}$ avec $(a,b)\in\mathbb{Q}^2$.

   Corrigé. On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\frac{2}{2\sqrt{3}-4}=\frac{2(2\sqrt{3}+4)}{(2\sqrt{3}-4)(2\sqrt{3}+4)}=\frac{4\sqrt{3}+8}{-4}=-\sqrt{3}-2$$

$$\boxed{\frac{2}{2\sqrt{3}-4}=-\sqrt{3}-2}$$

---

3. Soit $a\in\mathbb{R}$. Factoriser a^5-2^5 par $a-2$.

   Corrigé. On applique la formule du cours permettant de factoriser a^n-b^n avec $b=2$ et $n=5$:

$$\boxed{a^5-2^5=(a-2)(a^4+2a^3+4a^2+8a+16)}$$

---

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3k^2)$.

   Corrigé. On utilise les sommes classiques vues en cours et la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+3k^2)=2\sum_{k=1}^{n}k+3\sum_{k=1}^{n}k^2=2\frac{n(n+1)}{2}+3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   En simplifiant, on trouve :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(2k+3k^2)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+3)}$$

---

5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $P_n=\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1}3e^{2^k}$.

   Corrigé. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$P_n=3^n\prod_{k=2}^{n+1}e^{2^k}=3^n\times\exp\left(\sum_{k=2}^{n+1}2^k\right)=3^ne^{2^2\times\frac{2^n-1}{2-1}}=3^ne^{2^{n+2}-4}$$

$$\boxed{P_n=3^ne^{2^{n+2}-4}}$$

6. Calculer $S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé. En intervertissant l'ordre de sommation, il vient :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \frac{i(i+1)}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

En simplifiant, on trouve :

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+3)}{4}}$$

---

7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

Corrigé. On utilise la formule de Pascal :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}$$

On ajoute un terme à la somme pour que la borne supérieure soit $n+1$ afin de faire apparaitre la formule du binôme de Newton :

$$S_n = \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \right) - \binom{n+1}{n+1} = 2^{n+1} - 1$$

$$\boxed{S_n = 2^{n+1} - 1}$$

8. En faisant apparaitre des croissances comparées usuelles, déterminer : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+e^x}{\ln(x)+x}$.

Corrigé. Pour $x>0$, on a :

$$\frac{x^2+e^x}{\ln(x)+x} = \frac{e^x}{x} \times \frac{\frac{x^2}{e^x}+1}{\frac{\ln(x)}{x}+1}$$

D'après les résultats usuels de croissances comparées, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Par conséquent, par opérations sur les limites :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+e^x}{\ln(x)+x} = +\infty}$$

---

9. Soit f la fonction définie sur $[-1,1]\setminus\{0\}$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$. Étudier la limite de f en 0.

Corrigé. On multiplie et on divise par la quantité conjuguée de $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$. Pour $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2} \times \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{(1+x^2)-(1-x^2)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Avec cette expression, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 1}$$

10. Déterminer, si elle existe : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{Arctan}(x^2)}{\sin(3x)^2}$.

Corrigé. On va faire apparaitre les limites suivantes issues de taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0)}{x-0} = \text{Arctan}'(0) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Ce qui donne pour $x \neq 0$:

$$\frac{\text{Arctan}(x^2)}{\sin(3x)^2} = \frac{\text{Arctan}(x^2)}{x^2} \times \frac{(3x)^2}{\sin(3x)^2} \times \frac{1}{9} = \frac{\text{Arctan}(x^2)}{x^2} \times \left(\frac{3x}{\sin(3x)}\right)^2 \times \frac{1}{9}$$

Sous cette forme-là, en utilisant les limites précédentes, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\text{Arctan}(x^2)}{\sin(3x)^2} = \frac{1}{9}}$$

---

11. Trouver tous les réels x tels que $x - 1 < \sqrt{x}$.

Corrigé. L'inéquation est définie pour $x \geq 0$. Déjà si $x \in [0, 1[$, l'inéquation est clairement vérifiée puisque le membre de gauche est strictement négatif et le membre de droite positif. Pour $x \geq 1$, on peut élever les deux membres au carré puisqu'ils sont positifs et obtenir :

$$(x-1)^2 < x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 < 0$$

Les racines de ce trinôme de degré 2 sont $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Il est clair que $x_2 < 1$, ainsi dans le cas où $x \geq 1$, l'intervalle $[1, x_1[$ est solution.
En tenant compte des deux cas, nous obtenons :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[0, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[}$$

---

12. Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre $|3x - 5| = |7x + 6|$.

Corrigé. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} |3x-5| = |7x+6| \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} 3x-5 &=& 7x+6 \\ 3x-5 &=& -7x-6 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} 4x &=& -11 \\ 10x &=& -1 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x &=& -\dfrac{11}{4} \\ & & \\ x &=& -\dfrac{1}{10} \end{array} \right. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{11}{4}, -\frac{1}{10}\right\}}$$

13. Résoudre l'équation $\ln(x) + \ln(x-1) \geq \ln(6)$.

Corrigé. Le domaine de définition de l'équation est $]1, +\infty[$. Sur ce domaine l'équation est équivalente à :

$$\ln(x(x-1)) \geq \ln(6)$$

Par stricte croissance de la fonction ln, c'est équivalent à $x(x-1) \geq 6$, c'est-à-dire $x^2 - x - 6 \geq 0$.
Les racines de ce trinôme du second degré sont -2 et 3, le trinôme est donc positif sur $]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$.
En prenant l'intersection avec le domaine de définition, nous obtenons l'ensemble des solutions :

$$\boxed{\mathcal{S} = [3, +\infty[}$$

---

14. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $3^{2x} + 7^x = 9^{x+1}$.

Corrigé. Les différents termes sont définis pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} 3^{2x} + 7^x = 9^{x+1} &\Leftrightarrow 7^x = 3^{2x+2} - 3^{2x} \\ &\Leftrightarrow 7^x = 3^{2x}(3^2 - 1) \\ &\Leftrightarrow 7^x = 8 \times 3^{2x} \\ &\Leftrightarrow x\ln(7) = \ln(8) + 2x\ln(3) \\ &\Leftrightarrow x(\ln(7) - 2\ln(3)) = \ln(8) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln(8)}{\ln(7) - \ln(9)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\ln(8)}{\ln(7) - \ln(9)}\right\}}$$

---

15. Montrer que $2\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)$.

Corrigé. On commence par calculer la tangente de ces deux nombres :

$$\tan\left(2\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{1 - \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

et :

$$\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}$$

Deux réels ayant la même tangente sont égaux modulo π. Il reste les encadrer, en utilisant la stricte croissance de la fonction Arctan, on a :

$$0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow 0 < 2\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) < 2\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2}$$

et :

$$1 < \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{2}$$

Finalement, ces deux nombres ont la même tangente et sont tous les deux dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ d'où l'égalité :

$$\boxed{2\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)}$$

---

16. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, trouver et démontrer une formule pour $\text{sh}(a + b)$.

Corrigé. Par analogie avec la formule connue pour $\sin(a + b)$, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\text{ch}(a)\,\text{sh}(b) + \text{ch}(b)\,\text{sh}(a) = \frac{1}{4}\Big((e^a + e^{-a})(e^b - e^{-b}) + (e^b + e^{-b})(e^a - e^{-a})\Big) = \frac{1}{4}\Big(2e^{a+b} - 2e^{-a-b}\Big) = \text{sh}(a + b)$$

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \text{sh}(a + b) = \text{ch}(a)\,\text{sh}(b) + \text{ch}(b)\,\text{sh}(a)}$$

---

17. En dérivant, démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arccos}(\text{th}(x)) + 2\text{Arctan}(e^x) = \pi$.

Corrigé. On pose $f : x \mapsto \text{Arccos}(\text{th}(x)) + 2\text{Arctan}(e^x)$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car Arctan, exp et th sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et th est à valeurs dans $]-1, 1[$, ensemble sur lequel Arccos est définie et dérivable.

On va démontrer que la dérivée de f est nulle ainsi la fonction f sera constante.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= -\frac{1 - \text{th}^2(x)}{\sqrt{1 - \text{th}^2(x)}} + 2\frac{e^x}{1 + e^{2x}} \\
&= -\sqrt{1 - \text{th}^2(x)} + \frac{2e^x}{e^x(e^{-x} + e^x)} \\
&= -\sqrt{\frac{1}{\text{ch}^2(x)}} + \frac{1}{\text{ch}(x)} \\
&= -\frac{1}{|\text{ch}(x)|} + \frac{1}{\text{ch}(x)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

La dernière simplification étant correcte car la fonction ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $|\text{ch}| = \text{ch}$.

On en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0) = \text{Arccos}(\text{th}(0)) + 2\text{Arctan}(e^0) = \text{Arccos}(0) + 2\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2} + 2 \times \frac{\pi}{4} = \pi$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arccos}(\text{th}(x)) + 2\text{Arctan}(e^x) = \pi}$$

18. En passant en complexes et avec la technique de l'angle moitié, factoriser $\sin(2x) - \sin(4x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

    Corrigé. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin(2x) - \sin(4x) = \mathrm{Im}\Big(e^{2ix} - e^{4ix}\Big)$. On a :

    $$e^{2ix} - e^{4ix} = e^{3ix}\Big(e^{-ix} - e^{ix}\Big) = e^{3ix} \times (-2i\sin(x))$$

    En prenant la partie imaginaire :

    $$\boxed{\sin(2x) - \sin(4x) = -2\cos(3x)\sin(x)}$$

---

19. Soient $(a, b) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[^2$ tels que $\tan(a) = \frac{1}{7}$ et $\tan(b) = 2$. Calculer $\tan(a + 2b)$ et en déduire la valeur de $a + 2b$.

    Corrigé. Remarquons déjà que a et b existent car la fonction tan réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
    On a :

    $$\tan(2b) = \frac{2\tan(b)}{1 - \tan(b)^2} = -\frac{4}{3}$$

    On en déduit que :

    $$\tan(a + 2b) = \frac{\tan(a) + \tan(2b)}{1 - \tan(a)\tan(2b)} = -1$$

    Ce qui nous apprend qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a + 2b = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Or on sait que $0 < a + 2b < \frac{3\pi}{2}$ d'après l'encadrement initial sur a et b. La seule valeur possible est donc :

    $$\boxed{a + 2b = \frac{3\pi}{4}}$$

---

20. Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) - \sqrt{2} \leq 0$.

    Corrigé. On remarque que :

    $$\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 2\Big(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\Big) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

    L'inéquation de départ est donc équivalente à : $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ce qui donne :

    $$\exists k \in \mathbb{Z},\ x - \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right]$$

    $$\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, \frac{23\pi}{12} + 2k\pi\right]}$$

21. Développer $A = \cos(4x)$ où $x \in \mathbb{R}$. On exprimera le résultat uniquement avec la fonction cos.

Corrigé. Pour $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule de De Moivre :

$$\cos(4x) + i\sin(4x) = \Big(\cos(x) + i\sin(x)\Big)^4$$

On développe cette dernière expression en utilisant la formule du binôme de Newton puis on en prendra la partie réelle :

$$\Big(\cos(x) + i\sin(x)\Big)^4 = \cos^4(x) + 4i\cos^3(x)\sin(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) - 4i\cos(x)\sin^3(x) + \sin^4(x)$$

On en déduit que :

$$\cos(4x) = \cos^4(x) - 6\cos^2(x)(1 - \cos^2(x) + (1 - \cos^2(x))^2$$

On en déduit en simplifiant que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1}$$

---

22. Ensemble de définition et dérivée de : $f : x \mapsto \mathrm{sh}(\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(x))))$.

Corrigé. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car sh l'est. On procède par étapes en utilisant la dérivée d'une fonction composée.

$$a : x \mapsto \mathrm{sh}(x), \quad a' : x \mapsto \mathrm{ch}(x)$$

$$b : x \mapsto \mathrm{sh}(\mathrm{sh}(x)), \quad b' : x \mapsto \mathrm{ch}(x) \times \mathrm{ch}(\mathrm{sh}(x))$$

$$c : x \mapsto \mathrm{sh}(\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(x))), \quad c' : x \mapsto \mathrm{ch}(x) \times \mathrm{ch}(\mathrm{sh}(x)) \times \mathrm{ch}(\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(x)))$$

Ce qui donne enfin :

$$\boxed{f'(x) = \mathrm{ch}(x) \times \mathrm{ch}(\mathrm{sh}(x)) \times \mathrm{ch}(\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(x))) \times \mathrm{ch}(\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(x))))}$$

---

23. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver et démontrer une formule pour $f^{(n)}$.

Corrigé. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et en calculant les premières dérivées, on conjecture que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} : x \mapsto (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

On démontre cette formule par récurrence sur $\mathbb{N}$, l'initialisation est évidente. On suppose la formule vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$ fixé et on dérive :

$$f^{(n+1)} = -(n+1)(-1)^n \frac{n!}{x^{n+2}} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$$

Ce qui démontre la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} : x \mapsto (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}}$$

24. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(x+1)$.

Corrigé. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = \ln(x+1) - x + \frac{1}{2}x^2$. Montrons par une étude de fonction que f est positive sur $\mathbb{R}_+$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$f' : x \mapsto \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{1-(x+1)+x(x+1)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} > 0$$

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq f(0) = 0$. D'où le résultat :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(x+1)}$$

---

25. Déterminer une primitive sur un ensemble à préciser de $f : t \mapsto \dfrac{3}{\sqrt{a^2-t^2}}$ avec $a > 0$.

Corrigé. La fonction f est définie sur $]-a, a[$. Sur cet intervalle, on a :

$$f(t) = \frac{3}{a} \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}}$$

On reconnait la dérivée de la fonction Arcsin, une primitive de f sur $]-a, a[$ est :

$$\boxed{F : t \mapsto 3\text{Arcsin}\left(\frac{t}{a}\right)}$$

---

26. Déterminer une primitive sur un ensemble à préciser de $f : t \mapsto \dfrac{6t^2+8t}{(t^3+2t^2+1)^4}$.

Corrigé. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ où $\alpha \in [-3, -2]$ n'est pas facile à expliciter. On a :

$$f(t) = 2\frac{3t^2+4t}{(t^3+2t^2+1)^4}$$

On reconnait une forme du type $\dfrac{u'}{u^4}$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$\boxed{F : t \mapsto -\frac{2}{3}\frac{1}{(t^3+2t^2+1)^3}}$$

27. Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 (x^2+3)\ln(3x)dx$.

Corrigé. On effectue une intégration par parties en posant :

$$u(x) = \ln(3x) \qquad u'(x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$
$$v'(x) = x^2+3 \qquad v(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^2+3)\ln(3x)dx &= \left[\left(\frac{1}{3}x^3+3x\right)\ln(3x)\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^3+3x\right)\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{26}{3}\ln(6) - \frac{10}{3}\ln(3) - \left[\frac{1}{9}x^3+3x\right]_1^2\end{aligned}$$

En simplifiant les fractions et en utilisant la relation $\ln(6) = \ln(2)+\ln(3)$, cela donne :

$$\boxed{I = \frac{26}{3}\ln(2) + \frac{16}{3}\ln(3) - \frac{34}{9}}$$

---

28. En passant en complexes, calculer $I = \displaystyle\int_0^2 e^{2x}\cos(x)dx$.

Corrigé. On remarque que :

$$\int_0^2 e^{2x}\cos(x)dx = \mathrm{Re}\left(\int_0^2 e^{2x}e^{ix}dx\right)$$

On calcule cette dernière intégrale :

$$\int_0^2 e^{2x}e^{ix}dx = \int_0^2 e^{x(2+i)}e^{ix}dx = \left[\frac{e^{(2+i)x}}{2+i}\right]_0^2 = \frac{1}{2+i}\left(e^{4+2i}-1\right)$$

Il reste à prendre la partie réelle de ce nombre complexe en le mettant sous forme algébrique :

$$\frac{1}{2+i}\left(e^{4+2i}-1\right) = \frac{2-i}{5}\left(e^4(\cos(2)+i\sin(2))-1\right)$$

En prenant la partie réelle, on en déduit que :

$$\boxed{I = \frac{1}{5}e^4(2\cos(2)+\sin(2)) - \frac{2}{5}}$$

29. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\ln(3)}{2}} \frac{dx}{\operatorname{ch}(x)}dx$ en posant $t = e^x$.

Corrigé. On pose $t = e^x$, ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\ln(3)}{2}\right]$ et $dt = e^x dx$. On a aussi :

$$dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

Ainsi :

$$\frac{dx}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{dx}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \frac{2}{t+\frac{1}{t}} \times \frac{dt}{t} = \frac{2dt}{t^2+1}$$

Enfin, on s'intéresse aux bornes, si $x = 0$, on a : $t = e^x = 1$. Si $x = \dfrac{\ln(3)}{2}$, on a : $t = e^x = \sqrt{3}$. Il reste à terminer le calcul :

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{t^2+1} = \Big[2\operatorname{Arctan}(t)\Big]_1^{\sqrt{3}} = 2\Big(\operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) - \operatorname{Arctan}(1)\Big) = 2\Big(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{6}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{6}}$$

---

30. Trouver toutes les solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ de $(E)\ :\ (x^2+1)y' - xy = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}$.

Corrigé. Nous allons chercher les solutions de (E_1) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ car x^2+1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On a la réécriture :

$$(E_1)\ :\ y' - \frac{x}{x^2+1}y = \sqrt{x^2+1}$$

Avec les notations du cours, on a : $a(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}$. Une primitive de a sur $\mathbb{R}$ est : $A : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$. Les solutions de l'équation homogène associée à (E_1) sont les fonctions :

$$y_\lambda : x \mapsto \lambda e^{-A(x)} = \lambda e^{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)} = \lambda\sqrt{x^2+1} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Il n'y a pas de solution particulière évidente, on applique la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme : $y_0 : x \mapsto \lambda(x)\sqrt{x^2+1}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) = \lambda'(x)\sqrt{x^2+1} + \lambda(x)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

On a :

$$\begin{aligned}
y_0 \text{ solution de } (E_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) - \frac{x}{x^2+1}y_0(x) = \sqrt{x^2+1} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)\sqrt{x^2+1} + \lambda(x)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{x^2+1}\lambda(x)\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = 1
\end{aligned}$$

On peut choisir $\lambda : x \mapsto x$ et ainsi notre solution particulière est : $y_0 : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$.

On somme les solutions de l'équation homogène et la solution particulière pour obtenir les fonctions solutions de (E_1) et définies sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto (\lambda + x)\sqrt{x^2+1},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

---

31. Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' - 2y' + y = \sin(2x)$.

Corrigé. On résout l'équation différentielle sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique est :

$$X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$$

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$y : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x \qquad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On passe en complexes en cherchant une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{2ix}$ puis on prendra la partie imaginaire de ces solutions. On remarque que $2i$ n'est pas une racine du polynôme caractéristique, ce qui nous permet de chercher une solution particulière sous la forme $y_0 : x \mapsto \alpha e^{2ix}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ à déterminer. On a :

$$y_0' : x \mapsto 2i\alpha e^{2ix}$$
$$y_0'' : x \mapsto -4\alpha e^{2ix}$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
y_0 \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad y_0'' - 2y_0' + y_0 = e^{2ix} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ -4\alpha e^{2ix} - 2(2i\alpha e^{2ix}) + \alpha e^{2ix} = e^{2ix} \\
&\Leftrightarrow \quad -3\alpha - 4i\alpha = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{3+4i} = -\frac{3-4i}{25}
\end{aligned}$$

On a donc $y_0 : x \mapsto -\dfrac{3-4i}{25}e^{2ix} = -\dfrac{3-4i}{25}\Big(\cos(2x) + i\sin(2x)\Big)$. Il reste à prendre la partie imaginaire pour avoir une solution particulière de (E) :

$$x \mapsto -\frac{3}{25}\sin(2x) + \frac{4}{25}\cos(2x)$$

En sommant notre solution particulière et les solutions de l'équation homogène, nous obtenons l'ensemble des solutions :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x - \frac{3}{25}\sin(2x) + \frac{4}{25}\cos(2x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}}$$

32. Trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 - 2iz + 4 - 12i = 0$.

    Corrigé. On applique la méthode habituelle vue en cours, en calculant le discriminant et en cherchant une racine carrée. On trouve :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-2-2i,\ 2+4i\}}$$

---

33. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver tous les nombres complexes z tels que $(\sqrt{3}+3i)z^n = -6$.

    Corrigé. On transforme tout d'abord l'équation pour se ramener une forme $z^n = \omega$ que l'on sait résoudre à l'aide des racines n-ième de l'unité. On a :

$$(\sqrt{3}+3i)z^n = -6 \Leftrightarrow z^n = \frac{-6}{\sqrt{3}+3i} \Leftrightarrow z^n = -\frac{6(\sqrt{3}-3i)}{12} \Leftrightarrow z^n = -\frac{\sqrt{3}-3i}{2}$$

On doit ensuite écrire $-\frac{\sqrt{3}-3i}{2}$ sous forme exponentielle, ce qui donne en calculant le module qui vaut $\sqrt{3}$:

$$-\frac{\sqrt{3}-3i}{2} = \sqrt{3}\Big(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \sqrt{3}e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Il reste à résoudre l'équation en utilisant les racines n-ième de l'unité :

$$\begin{aligned} z^n = \sqrt{3}e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad &\Leftrightarrow \quad \Big(\frac{z}{3^{\frac{1}{2n}}e^{\frac{2i\pi}{3n}}}\Big)^n = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{3^{\frac{1}{2n}}e^{\frac{2i\pi}{3n}}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = 3^{\frac{1}{2n}}e^{\frac{2ik\pi}{n}+\frac{2i\pi}{3n}} \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \Big\{3^{\frac{1}{2n}}e^{2i\pi\frac{1+3k}{3n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\Big\}}$$

34. On définit le sinus d'un nombre complexe de la façon suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Résoudre l'équation $\sin(z) = 2$.

Corrigé. On utilise la définition de l'énoncé, on résout l'équation par équivalences :

$$\begin{aligned}
\sin(z) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad e^{iz} - e^{-iz} = 4i \\
&\Leftrightarrow \quad X - \frac{1}{X} = 4i \text{ (en posant } X = e^{iz}) \\
&\Leftrightarrow \quad X^2 - 4iX - 1 = 0 \text{ (on sait résoudre cette équation, le discriminant vaut } -12) \\
&\Leftrightarrow \quad X = (2+\sqrt{3})i \text{ ou } X = (2-\sqrt{3})i \\
&\Leftrightarrow \quad e^{iz} = (2+\sqrt{3})i \text{ ou } e^{iz} = (2-\sqrt{3})i
\end{aligned}$$

On sait résoudre l'équation $e^{iz} = (2+\sqrt{3})i$ puisque l'on a appris en cours à résoudre l'équation $e^z = \omega$ où $\omega \in \mathbb{C}^*$. On procède de même pour trouver :

$$iz = \ln(2+\sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2} + 2ik\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

De même pour l'équation $e^{iz} = (2-\sqrt{3})i$ qui nous donne :

$$iz = \ln(2-\sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2} + 2ik\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Il reste à diviser par i pour obtenir les solutions suivantes :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2 \pm \sqrt{3}),\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$