1-Vrai ou faux : une suite non bornée n'a aucune valeur d'adhérence.

2-Vrai ou faux : une suite n'ayant pas de valeur d'adhérence n'est pas bornée.

3-Vrai ou faux : si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = 1$.

4-Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Démontrer que (S_n) converge, on pourra examiner les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).

1-Vrai ou faux : une suite non bornée n'a aucune valeur d'adhérence.

Réponse : C'est faux. La suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = ((-1)^n + 1) \times n$ a pour valeur d'adhérence 0 puisque la suite extraite (u_{2n+1}) est constante égale à 0. Cependant la suite (u_{2n}) tend vers $+\infty$, ce qui démontre que (u_n) n'est pas bornée.

2-Vrai ou faux : une suite n'ayant pas de valeur d'adhérence n'est pas bornée.

Réponse : C'est vrai , c'est la contraposée du théorème de Bolzano-Weierstrass.

3-Vrai ou faux : si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = 1$.

Réponse : C'est faux. On a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ mais $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n+1}}{e^n} = e$.

4-Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Démontrer que (S_n) converge, on pourra examiner les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).

Réponse : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

• $S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} \geq 0$

• $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \leq 0$

• $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Ce qui démontre que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, elles convergent vers la même limite. D'après le théorème de recollement, la suite (S_n) converge également vers cette limite.

Ce qui démontre que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, elles convergent vers la même limite. D'après le théorème de recollement, la suite (S_n) converge également vers cette limite.

On démontrera plus tard dans l'année que cette limite vaut $\ln(2)$.

5-Que dire d'une suite bornée qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence ?

Réponse : Une telle suite va converger vers sa seule valeur d'adhérence. Notons (u_n) la suite et l l'unique valeur d'adhérence et supposons par l'absurde que (u_n) ne converge pas :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |u_n - l| > \varepsilon$$

Ce qui signifie qu'il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \notin [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, cet infinité d'indices peut se ranger dans une extractrice φ. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(n)} \notin [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. La suite $(u_{\varphi(n)})$ est bornée car (u_n) l'est, il existe une suite extraite de $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers un réel différent de l. Cette nouvelle suite extraite est également extraite de (u_n), ainsi (u_n) possède une autre valeur d'adhérence de l, ce qui est absurde.