

1-Trouver une solution évidente de (E_1) : $y' + y = 1$.

2-Trouver une solution évidente de (E_2) : $y' + y = x$.

3-Trouver une solution évidente de (E_3) : $y' + y = x^2$.

4-Soient $(a, \lambda) \in \mathbb{K}^2$. Montrer que l'équation différentielle (E) : $y' + ay = e^{\lambda x}$ admet une solution particulière de la forme : $x \mapsto Ce^{\lambda x}$ où $C \in \mathbb{K}$ est à déterminer.

5-Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions $f : x \mapsto \frac{\lambda + x}{1 + x^2}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

6-Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$.

1-Trouver une solution évidente de (E_1) : $y' + y = 1$.

Réponse : La fonction constante égale à 1 convient.

2-Trouver une solution évidente de (E_2) : $y' + y = x$.

Réponse : La fonction $x \mapsto x - 1$ convient.

3-Trouver une solution évidente de (E_3) : $y' + y = x^2$.

Réponse : La fonction $x \mapsto x^2 - 2x + 2$ convient.

4-Soient $(a, \lambda) \in \mathbb{K}^2$ avec $\lambda \neq -a$. Montrer que l'équation différentielle $(E) : y' + ay = e^{\lambda x}$ admet une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de la forme : $y_0 : x \mapsto Ce^{\lambda x}$ où $C \in \mathbb{K}$ est à déterminer.

Réponse : On a :

$$\begin{aligned} y_0 \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda Ce^{\lambda x} + aCe^{\lambda x} = e^{\lambda x} \\ &\Leftrightarrow \lambda C + aC = 1 \\ &\Leftrightarrow C = \frac{1}{\lambda + a} \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est $y_0 : x \mapsto \frac{1}{\lambda + a} e^{\lambda x}$.

5-Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions $f : x \mapsto \frac{\lambda + x}{1 + x^2}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Réponse : Pour tout x réel, on a : $(1 + x^2)f(x) = \lambda + x$. En dérivant cette relation, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2xf(x) + (1 + x^2)f'(x) = 1$$

Considérons l'équation différentielle linéaire :

$(E) : y' + \frac{2x}{1 + x^2}y = \frac{1}{1 + x^2}$. Avec la méthode vue en cours, on trouve que les solutions de (E) sont bien les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{1 + x^2} + \frac{x}{1 + x^2}$$

6-Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : (1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$.

Réponse : On note $u : x \mapsto 1 + x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0 \Leftrightarrow u(x)y''(x) + 2xy'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (uy')'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, uy' : x \mapsto \lambda$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, y' : x \mapsto \frac{\lambda}{1 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, y : x \mapsto \lambda \operatorname{Arctan}(x) + \mu$$