

1 Boucles et instructions conditionnelles

1.1 L'échiquier de Sissa

L'histoire raconte que le roi Belkib (dans l'Inde ancienne) promet une récompense fabuleuse à qui lui proposerait une distraction qui le satisferait. Lorsque le brahmane Sissa lui présenta son jeu d'échecs, il lui demanda ce qu'il souhaitait comme cadeau en récompense. Sissa demanda qu'on lui fournisse simplement un peu de riz pour ses vieux jours, et plus précisément un nombre de grains de riz suffisant pour que l'on puisse en déposer un seul sur la première case du jeu qu'il venait d'inventer, deux sur la suivante, quatre sur la troisième, et ainsi de suite. Le roi accorda immédiatement cette récompense sans se douter de ce qui allait suivre...

1. Écrire un programme qui affiche le nombre de grains à déposer sur chacune des 64 cases.
2. On considère qu'un grain de riz a une masse moyenne de 0.04 g. Déterminer la masse de riz que cette somme représente. Pour information, la production mondiale de riz en 2021, estimée par la Food and Agriculture Organization des Nations Unies, tournait autour de 515 millions de tonnes.

1.2 Équations du second degré

1. Écrire une fonction qui prend en paramètres 3 flottants a , b et c et renvoie la ou les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans le cas où le discriminant est positif ou nul.
2. Tester votre fonction avec les équations :
 - $x^2 + x + 1 = 0$
 - $3x^2 + 2x - 1 = 0$
 - $x^2 - 2x + 1 = 0$
 - $x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{9}{49} = 0$
3. Quel est le problème et comment le corriger ?

2 Autour des nombres premiers

La commande `%` renvoie le reste dans la division euclidienne. Par exemple :

```

1 >>>40 % 8 # 40 est bien divisible par 8
2 0
3 >>>50 % 8 # 50 = 6*8 + 2
4 2

```

1. Écrire une fonction qui prend en paramètre un entier naturel non nul n et renvoie la liste de ses diviseurs positifs.
2. Écrire une fonction qui prend en paramètre un entier naturel non nul n et renvoie `True` si c'est un nombre premier et `False` sinon. On pourra utiliser la fonction précédente.
3. Écrire une fonction qui prend en paramètre deux entiers naturels non nuls a et b et renvoie `True` s'ils sont premiers entre eux et `False` sinon. On pourra également utiliser la fonction de la question 1 en comparant les listes de diviseurs obtenues.
4. **Applications.**

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Est-il vrai que si $\sqrt{24n + 1}$ est un entier alors c'est un nombre premier ?

On pourra utiliser la fonction `round(a)` qui donne l'entier le plus proche de a .

- (b) On note $\pi(N)$ le nombre de nombres premiers entre 1 et N avec $N \in \mathbb{N}^*$.

Le théorème des nombres premiers affirme que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi(N)}{\frac{N}{\ln(N)}} = 1$$

Vérifier informatiquement ce résultat.

La fonction \ln s'obtient ainsi :

```

1 >>>import math as m # on importe le module math sous l'alias m
2 >>>m.log(10) # on calcule ln(10) par exemple
3 2.302585092994046

```

- (c) Quelle est la probabilité que deux entiers $(a, b) \in \llbracket 1, 1000 \rrbracket^2$ soient premiers entre eux ?
Reconnaissez-vous ce nombre ?
- (d) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_N = \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^N \frac{1}{p}$$

À l'aide de l'outil informatique, peut-on savoir si la suite (S_N) converge ?

3 Divers

3.1 Nombres de Lychrell

Un nombre entier naturel n étant donné, on considère le nombre m construit à l'aide des chiffres de n écrits dans l'ordre inverse. On note $f(n) = n + m$. Si le nombre obtenu est un palindrome (c'est-à-dire qu'il se lit de la même façon de gauche à droite ou de droite à gauche), on stoppe le procédé. Sinon, on poursuit le procédé en itérant la fonction f . Si le nombre de départ est un palindrome (en particulier s'il n'a qu'un chiffre), l'algorithme s'arrête immédiatement.

Par exemple, en partant de $n = 57$, on a $f(57) = 57 + 75 = 132$, qui n'est pas un palindrome. Puis $f(132) = 132 + 231 = 363$ qui est un palindrome : l'algorithme se termine.

L'algorithme se termine très vite avec la plupart des nombres entiers naturels que l'on peut tester, cependant certains nombres semblent faire exception. Un nombre est un entier pour lequel on présume que l'algorithme ne se termine pas.

1. Quel est le 1111-ième nombre de Lychrell ?

3.2 Résolution d'une équation par dichotomie

Une rapide étude mathématique permet de montrer que $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 6$ s'annule une unique fois sur l'intervalle $[0, 4]$. On note α la valeur où f s'annule.

1. Définir la fonction f en Python.
2. Écrire une fonction $dicho(e)$ qui prend en paramètre un flottant strictement positif e et renvoie un intervalle $[a, b]$ de longueur inférieure à e contenant α .

Vous pouvez consulter le document rappelant le principe de la dichotomie.

3.3 Méthode des rectangles

1. Écrire une fonction $rect(f, a, b, n)$ qui prend en paramètres une fonction f définie sur $[a, b]$ et renvoie une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ obtenue avec la méthode des rectangles.

Vous pouvez consulter le document rappelant le principe de la méthode des rectangles.