Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$$

Corrigé : On considère l'hypothèse suivante que l'on va démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{H}_n \ : \ 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$$

• **Initialisation.** Pour $n = 1$, la double inégalité devient : $2^0 \leq 1! \leq 1^1$, c'est-à-dire $1 \leq 1 \leq 1$. Ainsi $\mathcal{H}_1$ est vraie.

• **Hérédité.** On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour un entier naturel non nul n fixé. On a donc $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$, on multiplie cette relation par $(n+1)$ pour obtenir :

$$2^{n-1}(n+1) \leq n!(n+1) \leq n^n(n+1)$$

Or $2 \leq n+1$ car $n \geq 1$ donc
$2^n = 2^{n-1} \times 2 \leq 2^{n-1}(n+1) \leq n!(n+1) = (n+1)!$. On a bien $2^n \leq (n+1)!$.
D'autre part : $n^n(n+1) \leq (n+1)^n(n+1) = (n+1)^{n+1}$ ainsi on a bien $(n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$. Finalement :

$$2^n \leq (n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$$

On a démontré que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.