*En l'absence de précisions, $E$ désigne un ensemble quelconque.*

## Ensembles

**1** Décrire en extension et en compréhension les ensembles suivants, si cela est possible :

a) Les entiers naturels impairs.

b) L'ensemble des puissances de 10.

c) L'ensemble des nombres rationnels.

d) L'intervalle $]0, 1]$.

e) L'ensemble des valeurs prises par une fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

f) L'ensemble des antécédents d'un réel fixé $y$ par une fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**2** Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble, lesquelles de ces propositions sont correctes ?

a) $a \in E$

b) $a \subset E$

c) $\{a\} \in E$

d) $\{a\} \subset E$

e) $\emptyset \subset E$

f) $\emptyset \in E$

g) $\{\emptyset\} \subset E$

h) $\{\emptyset\} \in E$

**3** Décrire $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$ où $a$ désigne un élément.

**4** Soient $A, B$ et $C$ trois parties d'un ensemble $E$. Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.

**5** Soient $A, B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$. Montrer que :

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

**6** Étant données $A$ et $B$ deux parties de $E$, justifier que :

$$\overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$$

**7** Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$. On appelle différence symétrique de $A$ et $B$ l'ensemble $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Montrer que : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

**8** ♡ Étant données $A, B$ et $C$ trois parties de $E$, justifier les équivalences suivantes :

a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

b) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.

c) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

**9** ♡★ Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $A$ et $B$ des sous-ensembles de $E$ et $F$ respectivement.
Donner le complémentaire de $A \times B$ en fonction des complémentaires de $A$ et $B$.

**10** ★ Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

a) Montrer que $E \subset F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

b) Établir que $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.

c) Est-il vrai que $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ ?

**11** ★ Soient $E$ et $F$ deux ensembles, $A_1$, $A_2$ des parties de $E$ et $B_1$, $B_2$ des parties de $F$.

a) Montrer que :

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

b) Montrer que :

$$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$$

c) Est-il vrai que :

$$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$$

**12** ★ Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$. Résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X$ une partie de $E$.

**13** ★ Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble $X$. Les relations suivantes sont-elles vraies ?

a) $\mathcal{P}\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}(A_i)$.

b) $\mathcal{P}\big(\bigcup_{i \in I} A_i\big) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{P}(A_i)$.

**14** ★ Donner une expression plus simple des ensembles suivants :

a) $\displaystyle\bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} ]1/2^p, n+1[$.

b) $\displaystyle\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} ]1/2^p, n+1[$.

c) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [i, i+1]$ avec $n \in \mathbb{N}$.

## Injections, surjections et bijections

**15** On considère la fonction $f \ : \ x \mapsto \dfrac{3x-1}{x-2}$.

a) Montrer qu'il existe un unique réel, noté $a$, n'ayant pas d'image par $f$.

b) Montrer qu'il existe un unique réel, noté $b$, n'ayant pas d'antécédent par $f$.

c) Montrer que la restriction, $g$, de $f$ à $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ au départ et $\mathbb{R} \setminus \{b\}$ à l'arrivée est une bijection et préciser $g^{-1}$.

**16** ♡★ Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Établir les implications suivantes :

a) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.

b) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

c) $g \circ f$ injective et $f$ surjective $\Rightarrow g$ injective.

d) $g \circ f$ surjective et $g$ injective $\Rightarrow f$ surjective.

**17** ♡★ Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$

b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$

c) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$

d) $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & e^z \end{array}$

e) $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$

f) $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \setminus \{1\} & \to & \mathbb{Q} \\ (p,q) & \mapsto & p + \dfrac{1}{q} \end{array}$

**18** ♡★ Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ pair} \\ \dfrac{k-1}{2} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

a) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de $f$ et $g$.

b) Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ et étudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

**19** ★★ Soient $E$ un ensemble et $f : E \to E$ telle que $fofof = f$. Montrer que $f$ est injective si et seulement si $f$ est surjective.

**20** ★★ a) Donner un exemple de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'ayant aucun point fixe.

b) Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non monotone.

c) Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$.

**21** ★★★ Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$ et :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

a) Montrer que $f$ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

b) Montrer que $f$ est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

## Image directe et image réciproque

**22** a) Déterminer l'image directe de $\mathbb{R}^*$ par la fonction exponentielle définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer l'image réciproque de l'intervalle $[-1, 4]$ par la fonction $f(x) = x^2$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**23** ★ On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-4y, 2x+3y) \end{array}$$

a) Démontrer que $f$ est bijective.

b) Déterminer $f(\Delta)$ et $f^{-1}(\Delta)$ où :

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y = 1\}$$

**24** ★ On considère $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par :

$$f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$$

a) L'application $f$ est-elle injective ?

b) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.

c) Déterminer $f^{-1}(\{1\})$.

d) Déterminer $f^{-1}(\{2\})$.

e) L'application est-elle surjective ?

**25** ★ Soit $f : E \to F$ une application.

a) Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset f^{-1}(f(A))$$

b) Montrer que :

$$\forall B \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) \subset B$$

**26** ★★ On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 + z + 1 \end{array}$$

a) Déterminer $f(\mathbb{C})$, $f(\mathbb{C}^*)$ et $f(\mathbb{R})$.

b) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{C})$, $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.

**27** ♡★★ Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que $f$ est injective si et seulement si :

$$\forall (A, A') \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap A') = f(A) \cap f(A').$$

**28** ♡★★ Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que :

a) $f$ injective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$.

b) $f$ surjective $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.

## Défis

**D1** ★★★ Soit $E$ un ensemble. Montrer que $E$ et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas en bijection.

**D2** ★★★ Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que $f$ est bijective si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$$