1 Donner une primitive sur un ensemble à préciser de $f : t \mapsto \dfrac{1}{t(t^2+1)^2}$.

Corrigé : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$, ainsi on va en déterminer une primitive sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$. On a :

$$\int \frac{1}{t(t^2+1)^2}dt = \int \frac{t}{t^2(t^2+1)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u(u+1)^2}du$$

Ceci en posant $u = t^2$, on a $du = 2tdt$ d'où $tdt = \dfrac{1}{2}du$, ce changement de variable étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{1}{u(u+1)^2} = \frac{1+u-u}{u(u+1)^2} = \frac{1}{u(u+1)} - \frac{1}{(u+1)^2} = \frac{1+u-u}{u(u+1)} - \frac{1}{(u+1)^2} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2}$$

On obtient :

$$\boxed{F : t \mapsto \frac{1}{2}\Big(\ln(t^2) - \ln(t^2+1) + \frac{1}{t^2+1}\Big) \quad \text{définie sur } \mathbb{R}_+^* \text{ ou sur } \mathbb{R}_-^*}$$

2 Donner une primitive sur un ensemble à préciser de $g : t \mapsto \dfrac{\mathrm{th}(t)}{\mathrm{ch}(t)+1}$.

Corrigé : La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$. On pose $u = \mathrm{ch}(t)$, on a $du = \mathrm{sh}(t)dt$, ce changement de variable étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int \frac{\mathrm{th}(t)}{\mathrm{ch}(t)+1}dt = \int \frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)(\mathrm{ch}(t)+1)}dt = \int \frac{du}{u(u+1)} = \int \frac{1+u-u}{u(u+1)}du = \int \Big(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\Big)du = \ln(\mathrm{ch}(t)) - \ln(\mathrm{ch}(t)+1)$$

Une primitive de g est :

$$\boxed{G : t \mapsto \ln(\mathrm{ch}(t)) - \ln(\mathrm{ch}(t)+1) \quad \text{définie sur } \mathbb{R}}$$

3 ★★★ Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

Corrigé : On pose $t = \mathrm{Arctan}(x)$, ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On a : $dt = \dfrac{dx}{1+x^2}$. Ainsi :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(t))dt$$

On pose ensuite $u = \dfrac{\pi}{4} - t$ (on peut penser à ce changement de variable car il préserve les bornes de l'intervalle d'intégration). Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et $du = -dt$. On obtient :

$$\begin{aligned}
I &= -\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\Big(1+\tan\Big(\frac{\pi}{4}-u\Big)\Big)du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\Big(1+\frac{1-\tan(u)}{1+\tan(u)}\Big)du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\Big(\frac{2}{1+\tan(u)}\Big)du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\ln(2) - \ln(1+\tan(u))\Big)du \\
&= \frac{\pi}{4}\ln(2) - I
\end{aligned}$$

Au cours de ce calcul, nous avons utilisé la formule $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$. On en déduit que $I = \dfrac{\pi}{8}\ln(2)$.

$$\boxed{I = \frac{\pi}{8}\ln(2)}$$

4 ★★ Déterminer une primitive sur un ensemble à préciser de $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x})}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$.

Corrigé : La fonction f est définie sur $[0,1[$ car Arcsin est définie sur $[-1,1]$, toutefois lors du calcul qui suit, nous allons nous placer sur $I =]0,1[$. On effectue une primitivation par parties en posant :

$$u(x) = \mathrm{Arcsin}(\sqrt{x}) \quad u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$v'(x) = (1-x)^{-\frac{3}{2}} \qquad v(x) = 2(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x}}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ car Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. On obtient :

$$\int \frac{\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x})}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{2}{\sqrt{1-x}}\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x}) - \int \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx$$

Pour la seconde primitive, on pose $y = \sqrt{x}$, ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et comme $x = y^2$, on a $dx = 2ydy$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx &= \int \frac{1}{y(1-y^2)}2ydy \\
&= \int \frac{2}{1-y^2}dy \\
&= \int \left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right)dy \\
&= \ln(|1+y|) - \ln(|1-y|) \\
&= \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \text{ car } y \in]0,1[
\end{aligned}$$

Une primitive de f sur $]0,1[$ est :

$$\boxed{F : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{1-x}}\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x}) - \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)}$$

5 Déterminer une primitive sur un ensemble à préciser de $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{x^2}$.

Corrigé : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$, nous pouvons chercher une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Notons I l'un de ces deux intervalles. On effectue une primitivation par parties pour faire disparaitre la fonction Arctan. On pose :

$$u(x) = \mathrm{Arctan}(x) \quad u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$v'(x) = \frac{1}{x^2} \qquad v(x) = -\frac{1}{x}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On obtient :

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x^2}dx &= -\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} + \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx \\ &= -\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} + \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} \\ &= -\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} + \int \Big(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\Big)dx \\ &= -\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} + \ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\end{aligned}$$

Une primitive de f sur I est :

$$\boxed{F \ : \ x \mapsto -\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} + \ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$$

6 ★★ Déterminer une primitive sur un ensemble à préciser de $f : x \mapsto \dfrac{3+\ln(x)}{(4+\ln(x))^2}$.

Corrigé : La fonction f est définie sur $]0, e^{-4}[$ et sur $]e^{-4}, +\infty[$, notons I l'un de ces deux intervalles. On pose $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto 4 + \ln(x)$, on remarque que la fonction à intégrer est de la forme $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ que l'on sait intégrer en $\dfrac{u}{v}$. Une primitive de f sur l'intervalle I est :

$$\boxed{F \ : \ x \mapsto \frac{x}{4+\ln(x)}}$$

7 ★★ Donner une formule pour une primitive n-ième de la fonction $f : t \mapsto \ln(t)$.

Corrigé : La fonction f et toutes les fonctions que nous allons considérer sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous avons vu dans le cours l'expression d'une primitive de f que l'on peut trouver en intégrant par parties, on peut choisir $F_1 : t \mapsto t\ln(t) - t$. Poursuivons la démarche afin de pouvoir intuiter la formule générale, on cherche une primitive de F_1 en intégrant par parties :

$$\int (t\ln(t) - t)dt = \int t\ln(t)dt - \int tdt = \Big(\Big[\frac{t^2}{2}\ln(t)\Big] - \int \frac{t}{2}dt\Big) - \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2}\ln(t) - \frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{2}$$

Une primitive de F_1 est $F_2 : t \mapsto \dfrac{t^2}{2}\ln(t) - \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t^2}{2}$. Cherchons une primitive de F_2 :

$$\int \Big(\frac{t^2}{2}\ln(t) - \frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{2}\Big)dt = \int \frac{t^2}{2}\ln(t)dt - \int \frac{t^2}{4}dt - \int \frac{t^2}{2}dt = \Big(\Big[\frac{t^3}{6}\ln(t)\Big] - \int \frac{t^2}{6}dt\Big) - \frac{t^3}{12} - \frac{t^3}{6} = \frac{t^3}{6}\ln(t) - \frac{t^3}{18} - \frac{t^3}{12} - \frac{t^3}{6}$$

Ces quelques calculs suffisent à avoir une idée de la formule générale car :

$$F_1 : t \mapsto t(\ln(t) - 1), \qquad F_2 : t \mapsto \frac{t^2}{2}\Big(\ln(t) - \frac{1}{2} - 1\Big), \qquad F_3 : t \mapsto \frac{t^3}{6}\Big(\ln(t) - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\Big)$$

Démontrons par récurrence sur $n \geq 1$:

$$\mathcal{H}_n \ : \ \text{une primitive } n\text{-ième de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est } F_n : t \mapsto \frac{t^n}{n!}\Big(\ln(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big)$$

- **Initialisation.** Nous avons vu que la formule est vraie pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
- **Hérédité.** On suppose que la formule est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(t) &= \int F_n(t)dt \\
&= \int \frac{t^n}{n!}\Big(\ln(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big)dt \\
&= \int \frac{t^n}{n!}\ln(t)dt - \int \Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big)\frac{t^n}{n!}dt \\
&= \Big[\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\ln(t)\Big] - \int \frac{t^n}{(n+1)!}dt - \Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\ln(t) - \frac{t^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}dt - \Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\Big(\ln(t) - \frac{1}{n+1} - \Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big)\Big) \\
&= \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\Big(\ln(t) - \Big(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\Big)\Big)
\end{aligned}$$

Ce qui démontre la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Une primitive } n\text{-ième de } F_n : t \mapsto \frac{t^n}{n!}\Big(\ln(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big)}$$

$\boxed{8}$ ★★ Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}dt$.

Corrigé : Ici la règle de Bioche ne s'applique pas à cause du facteur t devant le sinus. On va poser $u = \pi - t$, ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et $du = -dt$. On a :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)} = \int_{\pi}^{0} \frac{(u-\pi)\sin(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}(-du) = \int_0^{\pi}\Big(\frac{\pi\sin(u)}{1+\cos^2(u)} - \frac{u\sin(u)}{1+\cos^2(u)}\Big)du = \pi\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{1+\cos^2(u)}du}_{J} - I$$

Il reste à calculer J et on aura $I = \frac{\pi}{2}J$. L'intégrande de J est de la forme $\frac{-v'}{1+v^2}$ avec $v : u \mapsto \cos(u)$. Ainsi :

$$J = \int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{1+\cos^2(u)}du = \Big[-\operatorname{Arctan}(\cos(u))\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{4}}$$

$\boxed{9}$ ★★ On note F_n la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$.

1. Calculer F_1.
2. Calculer F_2.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une relation entre F_n et F_{n+1}.
4. Calculer F_3.

Corrigé :

1. Si $n=1$, on cherche la primitive qui s'annule en 0 de $f_1 : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$, c'est $F_1 : t \mapsto \text{Arctan}(t)$.
2. Cherchons une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ en effectuant le changement de variable $u = \text{Arctan}(t)$, ce changement de variable étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On a $du = \dfrac{dt}{1+t^2}$, on en déduit que :
$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{1}{1+t^2} \times \frac{dt}{(1+t^2)} = \int \frac{1}{1+\tan^2(u)} du = \int \cos^2(u) du = \frac{1}{2} \int (1+\cos(2u)) = \frac{1}{2}\Big(u + \frac{1}{2}\sin(2u)\Big)$$
Une primitive de f_2 sur $\mathbb{R}$ est $F_2 : t \mapsto \dfrac{1}{2}\Big(\text{Arctan}(t) + \dfrac{1}{2}\sin\Big(2\text{Arctan}(t)\Big)\Big)$, cette primitive s'annule bien 0 comme demandé.
3. On effectue une intégration par parties en intégrant la fonction constante égale à 1 et en dérivant la fraction rationnelle, ces fonctions étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+t^2)^n} dt &= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int t \times \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - 2n \int \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \end{aligned}$$
On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$F_n(t) = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n(F_n(t) - F_{n+1}(t))$$
Ceci en remarquant que toutes les primitives mises en jeu s'annulent en 0. En réorganisant les termes, il vient :
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ F_{n+1}(t) = \frac{t}{2n(1+t^2)^n} + \Big(1 - \frac{1}{2n}\Big) F_n(t)}$$
4. On utilise l'expression de F_2 et la relation de la question précédente pour obtenir :
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ F_3(t) = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3t}{8(1+t^2)} + \frac{3\text{Arctan}(t)}{8}}$$

10 Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{dx}{\text{ch}(x)}$.

Corrigé : On pose $t = e^x$, ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \ln(\sqrt{3})]$. On a $dt = e^x dx$ ou encore $dx = \dfrac{dt}{t}$. Cela nous donne :
$$I = \int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{dx}{\text{ch}(x)} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\frac{dt}{t}}{\frac{t+\frac{1}{t}}{2}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{t^2+1} = \Big[2\text{Arctan}(t)\Big]_1^{\sqrt{3}} = 2\Big(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{6}$$
$$\boxed{I = \frac{\pi}{6}}$$

11 ★★ Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\text{ch}(x)^3}$

Corrigé : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. On pose $t = \text{sh}(x)$, ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $dt = \text{ch}(x)dx$. On a :

$$\int \frac{dx}{\text{ch}(x)^3} = \int \frac{\text{ch}(x)dx}{\text{ch}(x)^4} = \int \frac{\text{ch}(x)dx}{(1+\text{sh}(x)^2)^2} = \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{(1+t^2)-t^2}{(1+t^2)^2}dt = \underbrace{\int \frac{1}{1+t^2}dt}_{(1)} - \underbrace{\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt}_{(2)}$$

(1) s'intègre sans problème en $t \mapsto \text{Arctan}(t)$.

(2) se calcule en effectuant une intégration par partie :

$$u(t) = t \qquad u'(t) = 1$$

$$v'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2} \qquad v(t) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}$$

Ce qui donne :

$$\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt = -\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} + \int \frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}dt = -\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\text{Arctan}(t)$$

Finalement :

$$\int \frac{dx}{\text{ch}(x)^3} = \frac{1}{2}\text{Arctan}(t) + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\left(\text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \frac{\text{sh}(x)}{1+\text{sh}(x)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)^2}\right)$$