

Limites et continuité d'une fonction numérique

► Limites et continuité en un point

- Notion de voisinage, propriété vraie au voisinage d'un point.
- Définition de la limite, unicité. Limite en un point où la fonction est définie, continuité. Exemples.
- Limites infinies. Caractérisation séquentielle de la limite, de la continuité.
- Fonctions continues égales sur une partie dense.
- Propriétés des limites, somme, produit, inverse, composition.
- Passage à la limite dans les inégalités. Théorème d'encadrement.
- Limites à gauche et à droite, continuité à gauche et à droite, exemples et contre-exemples.

► Continuité sur un intervalle

- Théorème des valeurs intermédiaires et applications.
- Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
- Notion de prolongement par continuité, exemples.

► Fonctions lipschitziennes et continuité uniforme

- Fonction lipschitzienne, continuité, exemples et contre-exemples.
- Continuité uniforme, exemples, théorème de Heine.

► Cas des fonctions monotones

- Théorème de la limite monotone, exemple.
- Équivalence entre stricte monotonie et injectivité pour une fonction continue.
- Continuité de la bijection réciproque d'une fonction continue.

► Cas des fonctions à valeurs complexes

Questions de cours :

- TVI
- Image d'un segment par une fonction continue.
- Théorème de Heine.
- Preuve d'un cas particulier du théorème de la limite monotone : si f est une fonction croissante définie dans un voisinage à droite de a alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe et $f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- Équivalence entre stricte monotonie et injectivité pour une fonction continue (sans la fin du théorème sur f^{-1}).