Logarithmes et exponentielles

1 ♡ Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $f : x \mapsto a^x$. Montrer que le point d'intersection de la tangente passant par l'origine avec la courbe représentative de la fonction f a une ordonnée indépendante de a.

2 a) Simplifier a^b pour $a = \exp(x^2)$ et $b = \dfrac{1}{x}\ln(x^{1/x})$.

b) Comparer $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^x)}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^x)^x$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/x}$.

3 ★ a) Étudier la fonction $f : x \mapsto x^x$.

b) Trouver tous les $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4 ★ Résoudre les systèmes d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

a) $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$ b) $\begin{cases} e^x e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$

5 ♡★ Montrer que $\forall x \in]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \dfrac{1}{2}$.

6 ♡★ Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a) $e^x + e^{1-x} = e + 1$

b) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

c) $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

d) $\log(x-2) + \log(x+3) = 2$

e) $\ln(x^2-1) + \ln(4) = \ln(4x-1)$

f) $\ln|x-1| + \ln|x+2| = \ln|4x^2+3x-7|$

g) $2^{x^2} = 3^{x^3}$

h) $2^{x+1} + 4^x = 15$

i) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$

j) $\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(a)}{\ln(x)}$ où $a > 1$

k) $3^x + 4^x = 5^x$

l) $x^{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2}$

Fonctions hyperboliques

7 Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{ch}x \geq 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

8 On pose $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{th}(x)}{1-\mathrm{th}(x)}}\right)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Simplifier f.

9 ★ Etablir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}x) = \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}x}\right)$$

10 ★ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $5\mathrm{ch}(x) - 3\mathrm{sh}(x) = 4$

b) $3\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) = 1$

c) $\mathrm{ch}^5(x) - \mathrm{sh}^5(x) = 1$

11 ★ Trouver les x et y réels tels que :

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}(y) = 4 \\ \mathrm{sh}(x) + \mathrm{sh}(y) = 1 \end{cases}$$

12 ♡★★ Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, calculer :

$$C = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(a+kb) \text{ et } S = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(a+kb)$$

13 ★★★ Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

Fonctions circulaires

14 ♡ Simplifier l'expression $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ en donnant avant tout l'ensemble de définition.

15 ★ Simplifier les expressions en donnant les ensembles de définition :

a) $\cos(2\mathrm{Arccos}(x))$ b) $\cos(2\mathrm{Arcsin}(x))$ c) $\sin(2\mathrm{Arccos}(x))$

d) $\cos(2\mathrm{Arctan}(x))$ e) $\sin(2\mathrm{Arctan}(x))$ f) $\tan(2\mathrm{Arcsin}(x))$

16 ♡★ Simplifier $\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{2} + \mathrm{Arctan}\dfrac{1}{5} + \mathrm{Arctan}\dfrac{1}{8}$.

17 ♡★ Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a) $\mathrm{Arcsin}(x) = \mathrm{Arcsin}\dfrac{4}{5} + \mathrm{Arcsin}\dfrac{5}{13}$

b) $\mathrm{Arcsin}(\tan(x)) = x$

c) $\mathrm{Arccos}(x) = \mathrm{Arcsin}(2x)$

d) $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(\sqrt{3}x) = \dfrac{7\pi}{12}$

e) $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{\tan x}{2}\right) = x$

f) $\mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1}{3}\right) + \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1}{4}\right) = \mathrm{Arcsin}(x)$.

18 ♡★ Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a) $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$

b) $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$

c) $\sin(x) + \sin(3x) = 0$

d) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$

e) $3\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{6}$

f) $2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0$

g) $\tan(x)\tan(2x) = 1$.

19 ★★ Simplifier les fonctions suivantes et les représenter graphiquement :

a) $f : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin(x)) + \text{Arccos}(\cos(x))$

b) $g : x \mapsto \text{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}\right)$.

20 ★★ Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arccos}(\text{th}(x)) + 2\text{Arctan}(e^x) = \pi$$

Défis

D1 ★★★ Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))$$

D2 ★★★★ Soient $(x_i)_{1\leq i\leq 13}$ des réels. Montrer que :

$$\exists (i,j) \in [\![1, 13]\!]^2,\ i \neq j,\ 0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leq 2 - \sqrt{3}$$