

A-Préliminaires

Cette partie est exclusivement du cours, il s'agit d'énumérer les différentes propriétés de la fonction arctangente.

1. La restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est continue et strictement croissante. On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty.$$

Ainsi d'après le théorème de la bijection, la fonction tangente admet une bijection réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on note cette bijection réciproque : Arctan.

2. On a par construction :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \text{Arctan}(\tan(x)) = x$$

La fonction Arctan est continue, strictement croissante et impaire sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction tangente est également continue, strictement croissante et impaire sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

La dérivée de la fonction tangente est la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $x \mapsto 1 + \tan^2(x)$, cette dérivée ne s'annule pas. Ceci permet de dire que la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

On a les limites suivantes qui se déduisent des limites de la fonction tangente données précédemment :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}^-$$

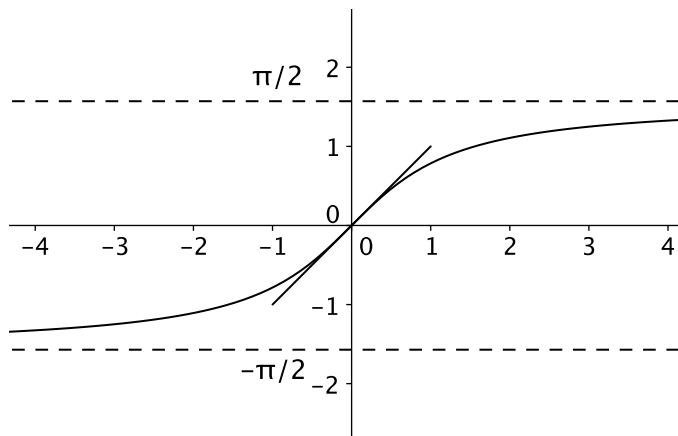
Ces limites impliquent que la droite d'équation $y = -\frac{\pi}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et que la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

On a les valeurs remarquables suivantes qui se déduisent des valeurs remarquables prises par la fonction tangente :

$$\text{Arctan}(0) = 0, \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}, \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \text{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

Par imparité, on trouve les valeurs de l'arc tangente en $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, -1 et $-\sqrt{3}$.

On a le graphique suivant :



B-Développement en série entière de la fonction Arctan

1. Soit $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Supposons dans un premier temps $q \neq -1$, on a :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k q^k = \sum_{k=0}^n (-q)^k = \frac{1 - (-q)^{n+1}}{1 - (-q)} = \frac{1 - (-q)^{n+1}}{1 + q}$$

Ceci en utilisant la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique.

Si $q = -1$, on a : $\sum_{k=0}^n (-1)^k (-1)^k = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$.

On a démontré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (-1)^k q^k = \begin{cases} n + 1 & \text{si } q = -1 \\ \frac{1 - (-q)^{n+1}}{1 + q} & \text{si } q \neq -1 \end{cases}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction S_n est dérivable car c'est une fonction polynomiale. Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$S'_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k (2k + 1) \frac{x^{2k}}{2k + 1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k (x^2)^k = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 + x^2}.$$

La dernière égalité s'obtenant grâce à la question précédente appliquée à $q = x^2$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, S'_n(x) = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 + x^2}$$

3. (a) Puisque $S_n(0) = 0$ et $\text{Arctan}(0) = 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n(0) = 0$$

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction R_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$R'_n(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 + x^2} = \frac{(-x^2)^{n+1}}{1 + x^2} = \begin{cases} \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} & \text{si } n \text{ impair} \\ -\frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Si n est impair : $\forall x \geq 0, R'_n(x) \geq 0$. Si n est pair : $\forall x \geq 0, R'_n(x) \leq 0$. Ce qui permet de connaître les variations de R_n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} R_n \text{ est croissante} & \text{si } n \text{ impair} \\ R_n \text{ est décroissante} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

- (c) ► Soit n un entier naturel impair. On a pour tout $x \geq 0$: $R_n(x) \geq R_n(0) = 0 \Leftrightarrow \text{Arctan}(x) \geq S_n(x)$.
 Dans ce cas $n+1$ est un entier pair, donc $x \geq 0$: $R_{n+1}(x) \leq R_{n+1}(0) = 0 \Leftrightarrow \text{Arctan}(x) \leq S_{n+1}(x)$.
 Finalement :

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair : } \forall x \geq 0, S_n(x) \leq \text{Arctan}(x) \leq S_{n+1}(x)}$$

- Soit n un entier naturel pair. On a pour tout $x \geq 0$: $R_n(x) \leq R_n(0) = 0 \Leftrightarrow \text{Arctan}(x) \leq S_n(x)$.
 Dans ce cas $n+1$ est un entier impair, donc $x \geq 0$: $R_{n+1}(x) \geq R_{n+1}(0) = 0 \Leftrightarrow \text{Arctan}(x) \geq S_{n+1}(x)$.
 Finalement :

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est pair : } \forall x \geq 0, S_{n+1}(x) \leq \text{Arctan}(x) \leq S_n(x)}$$

- (d) Remarquons pour commencer que pour tout $x \geq 0$:

$$S_{n+1} - S_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

- Soit n un entier naturel impair et $x \geq 0$, en retranchant $S_n(x)$ à l'inégalité obtenue à la question précédente, on a :

$$0 \leq \text{Arctan}(x) - S_n(x) \leq S_{n+1}(x) - S_n(x) = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \quad (A)$$

- Soit n un entier naturel pair et $x \geq 0$, en retranchant $S_n(x)$ à l'inégalité obtenue à la question précédente, on a :

$$-\frac{x^{2n+3}}{2n+3} = S_{n+1}(x) - S_n(x) \leq \text{Arctan}(x) - S_n(x) \leq 0 \quad (B)$$

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les inégalités (A) et (B) donnent :

$$\forall x \geq 0, -\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \text{Arctan}(x) - S_n(x) \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, \left| \text{Arctan}(x) - S_n(x) \right| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}}$$

4. (a) On utilise l'inégalité précédente avec $x \in [0, 1]$:

$$\left| \text{Arctan}(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n+3}}{2n+3} = 0$ puisque $|x| \leq 1$, on a en passant à la limite :

$$\text{Arctan}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

On reprend l'inégalité de la question 3.(d) en utilisant l'imparité de Arctan et de S_n pour $x \in [-1, 0]$, on a $-x \in [0, 1]$ et :

$$\left| \text{Arctan}(-x) - S_n(-x) \right| \leq \frac{(-x)^{2n+3}}{2n+3}$$

Ce qui donne :

$$\left| \operatorname{Arctan}(x) - S_n(x) \right| \leq \frac{(-x)^{2n+3}}{2n+3}$$

La conclusion est la même en passant à la limite, finalement on obtient bien :

$$\forall x \in [-1, 1], \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

- (b) Il reste à appliquer la formule précédente avec $x = 1$, sachant que $\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$, pour obtenir la formule annoncée :

$$\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

La formule précédente est horriblement lente pour calculer des décimales de π , en effet le calcul précédent montre qu'il faut ajouter presque 2 millions de termes pour avoir 6 chiffres corrects de π .

C-Les nombres de Fibonacci et l'arctangente

1. Démontrons la propriété annoncée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{H}_n : F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$$

• **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a bien : $F_1^2 - F_0 F_2 = 1 = (-1)^0$.

• **Hérédité.** Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{H}_n$ vraie, on a :

$$F_{n+2}^2 - F_{n+1} F_{n+3} = F_{n+2}^2 - F_{n+1} (F_{n+1} + F_{n+2}) = F_{n+2} (F_{n+2} - F_{n+1}) - F_{n+1}^2 = F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée et termine la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$$

2. Soit $n \geq 1$: cette condition va permettre de garantir que les dénominateurs mis en jeu ne sont pas nuls puisque $F_n > 0$ dès que $n \geq 1$.

• Étant donné que $n \geq 1$, on a : $0 \leq \frac{1}{F_{2n}} \leq 1$. Par croissance de la fonction Arctan , cela permet d'affirmer que $0 \leq \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) \leq \frac{\pi}{4}$.

On a également : $0 \leq \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) < 1$ et $0 \leq \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) < 1$, toujours en utilisant la stricte croissance de la fonction Arctan , on en déduit que :

$$0 \leq \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Les deux nombres $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)$ et $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$ sont compris dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; pour démontrer qu'ils sont égaux, il suffit de démontrer qu'ils ont la même tangente.

- D'une part :

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)\right) = \frac{1}{F_{2n}}$$

D'autre part :

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right) = \frac{\frac{1}{F_{2n+1}} + \frac{1}{F_{2n+2}}}{1 - \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+2}}} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n+2}}{F_{2n+2}F_{2n+1} - 1}$$

On peut simplifier cette expression puisqu'elle est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{(F_{2n+1} + F_{2n+2})F_{2n}}{(F_{2n+2}F_{2n+1} - 1)F_{2n}} &= \frac{F_{2n+1}F_n + F_{2n+2}F_{2n}}{(F_{2n+2}F_{2n+1} - 1)F_{2n}} \\ &= \frac{F_{2n+1}F_n + F_{2n+1}^2 - (-1)^{2n}}{(F_{2n+2}F_{2n+1} - 1)F_{2n}} \quad \text{en utilisant l'identité de Cassini} \\ &= \frac{F_{2n+1}(F_n + F_{2n+1}) - 1}{(F_{2n+2}F_{2n+1} - 1)F_{2n}} \\ &= \frac{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1}{(F_{2n+2}F_{2n+1} - 1)F_{2n}} \\ &= \frac{1}{F_{2n}} \end{aligned}$$

Ce qui démontre bien la formule attendue :

$$\forall n \geq 1, \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$$

3. (a) En appliquant la formule précédente avec $n = 1$, il vient :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_2}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_3}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_4}\right) \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)$$

Ce qui démontre que :

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) \quad (1)$$

- (b) En utilisant la formule précédente avec $n = 2$, il vient :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_4}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_6}\right) \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$$

En remplaçant dans l'égalité (1), il vient :

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) \quad (2)$$

- (c) De même, en appliquant la formule précédente pour $n = 3$, on obtient :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{13}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{21}\right)$$

En remplaçant dans l'égalité (2), il vient :

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{13}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{21}\right)$$

Vous aurez compris comment poursuivre la généralisation de ces formules. Elles peuvent être utilisées pour le calcul de décimales de π .

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la relation démontrée à la question 2., on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) + \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) \\ &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+3}}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+4}}\right) + \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) \\ &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+4}}\right) + \sum_{k=0}^{n+1} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

(u_n) est constante

(b) La suite (u_n) est constante égale à $u_0 = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_1}\right) = 2\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2}$.

Ce qui démontre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$. D'autre part, nous avons démontré que :

$$\forall n \geq 0, u_n - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) \quad (\star)$$

• Grâce à la question 1.(b) de la partie A, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{2n+2} = +\infty$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{F_{2n+2}} = 0$, par continuité de la fonction Arctan , on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) = \operatorname{Arctan}(0) = 0$$

• En passant à la limite dans la relation $(\star)$, on en déduit que :

$$\frac{\pi}{2} - 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right)$$

Ce qui démontre la relation annoncée :

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right)$$

D-Entracte

1. (a) Cette inégalité peut se démontrer de façon classique par étude de fonctions. Cependant le plus direct ici est d'utiliser la question 3.(c) de la partie B avec $n = 0$ qui est pair. Nous obtenons :

$$\forall x \geq 0, S_1(x) \leq \text{Arctan}(x) \leq S_0(x)$$

En explicitant les expressions de $S_0(x)$ et $S_1(x)$ cela donne exactement l'inégalité voulue :

$$\forall x \geq 0, x - \frac{1}{3}x^3 \leq \text{Arctan}(x) \leq x$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On utilise l'inégalité précédente avec $x = \frac{k}{n^2}$ puis on somme les inégalités obtenues pour k allant de 0 à n :

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{3} \frac{k^3}{n^6} \right) \leq \sum_{k=0}^n \text{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2}$$

Par linéarité de la somme et d'après les formules vues en cours sur les sommes classiques, on obtient :

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n^2(n+1)^2}{12n^6} \leq \sum_{k=0}^n \text{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

D'après le théorème d'encadrement et en utilisant le fait que la limite en $+\infty$ d'une fonction rationnelle est celle du quotient des termes de plus haut degré, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \text{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

2. On effectue une intégration par parties, les fonctions mises en jeu étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\int \text{Arctan}(x) dx = \int 1 \times \text{Arctan}(x) dx = [x \text{Arctan}(x)] - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \text{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction Arctan est :

$$x \mapsto x \text{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

3. (a) Soit $f : x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x^3)$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\pi$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi$. Ainsi f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $] -\pi, \pi[$ et on peut affirmer que l'équation $f(x) = \frac{3\pi}{4}$ admet une unique solution. De plus cette solution est positive car $f(0) = 0$.
- (b) Soit x une solution de l'équation, en prenant la fonction tangente, on obtient :

$$\tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x^3)) = -1 \Leftrightarrow \frac{x+x^3}{1-x^4} = -1$$

- (c) Il reste à terminer la résolution, on a : $\frac{x+x^3}{1-x^4} = \frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{x}{1-x^2}$. On obtient donc $\frac{x}{1-x^2} = -1$, ce qui donne l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$. Cette équation possède deux solutions :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

On garde la solution positive :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

E-Simplification de $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)$

Ce problème se propose de trouver une simplification d'une somme d'arctangentes. L'outil principal est la formule : $\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$. Les complications proviennent essentiellement des nombreux cas à considérer. Dans un second temps, deux applications des formules trouvées sont proposées. Notamment la formule de Machin, du nom de John Machin un mathématicien anglais du XVIII^{ème} siècle, qui permet de calculer des décimales de π .

- La fonction f est clairement définie sur $\mathbb{R}^*$ puisque la fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a d'après la formule de dérivation d'une fonction composée :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \mathbb{R}_-^* \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 0$$

Comme la dérivée de f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, cela signifie que f est constante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Ainsi, il suffit de prendre deux valeurs particulières pour avoir :

$$\forall x \in] -\infty, 0[, f(x) = f(-1) = 2\text{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = f(1) = 2\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2}$$

On vient de démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- (a) i. Pour $a \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $\cos(a) \neq 0$ et $\tan(a)$ est bien défini. On a :

$$\frac{1}{\cos^2(a)} = \frac{\cos^2(a) + \sin^2(a)}{\cos^2(a)} = 1 + \frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)} = 1 + \tan^2(a)$$

$$\forall a \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \frac{1}{\cos^2(a)} = 1 + \tan^2(a)$$

On va utiliser la relation suivante valable pour tout $a \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$: $\cos^2(a) = \frac{1}{1 + \tan^2(a)}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1 + x^2} \quad (\star)$$

De plus pour tout x réel, on a : $\text{Arctan}(x) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, ainsi $\cos(\text{Arctan}(x)) > 0$.

Ainsi en prenant la racine carrée de la relation $(\star)$, on obtient :

$$\cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

ii. On a vu au cours du raisonnement précédent que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\text{Arctan}(x)) > 0$, ainsi on peut écrire :

$$\tan(\text{Arctan}(x)) = \frac{\sin(\text{Arctan}(x))}{\cos(\text{Arctan}(x))}$$

Etant donné que : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\tan(\text{Arctan}(x)) = x$, on a en utilisant la question précédente :

$$\sin(\text{Arctan}(x)) = \tan(\text{Arctan}(x)) \times \cos(\text{Arctan}(x)) = x \times \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

On a démontré que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

(b) On va utiliser la formule de trigonométrie valable pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

En utilisant la question 2.(a), on a pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \cos(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) &= \cos(\text{Arctan}(x)) \cos(\text{Arctan}(y)) - \sin(\text{Arctan}(x)) \sin(\text{Arctan}(y)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} \\ &= \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{1 + y^2}} \end{aligned}$$

On a démontré que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \cos(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) = \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{1 + y^2}} \quad (\star\star)$$

(c) Etant donné que la fonction arc tangente est à valeurs dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on a pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in] -\pi, \pi[$.

Or d'après l'hypothèse de la question, on a $xy \neq 1$, ainsi le résultat obtenu à la question précédente montre que $\cos(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) \neq 0$. Ceci implique que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \notin \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$.

Finalement :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ avec } xy \neq 1, \text{ Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$$

- (d) Etant donné que $\cos(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) \neq 0$, la quantité $\tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y))$ existe. On a alors puisque $xy \neq 1$:

$$\begin{aligned} \tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) &= \frac{\tan(\text{Arctan}(x)) + \tan(\text{Arctan}(y))}{1 - \tan(\text{Arctan}(x)) \tan(\text{Arctan}(y))} \\ &= \frac{x + y}{1 - xy} \end{aligned}$$

En résumé :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } xy \neq 1, \tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) = \frac{x + y}{1 - xy} \quad (\star\star\star)$$

- (e) On suppose que $xy < 1$, d'après la relation $(\star\star)$, on a $\cos(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) > 0$. Ainsi, en utilisant la question 2.(b), il apparaît que l'on se trouve dans le cas où $\tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

On rappelle que pour tout $a \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $\text{Arctan}(\tan(a)) = a$, on prend alors l'arc tangente de la relation $(\star\star\star)$, on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } xy < 1, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$$

- (f) On suppose $xy > 1$, d'après la relation $(\star\star)$, on a $\cos(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) < 0$, ainsi on a :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$$

De plus, on suppose dans cette question que $x > 0$, ce qui implique $\text{Arctan}(x) > 0$ et par suite $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) > -\frac{\pi}{2}$.

On en déduit que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.

Remarquons pour poursuivre le calcul le fait suivant : si $a \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, on a : $a - \pi \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$ et dans ce cas :

$$\text{Arctan}(\tan(a)) = \text{Arctan}(\tan(a - \pi)) = a - \pi.$$

Fort de ce résultat, appliquons la fonction arc tangente à la relation $(\star\star\star)$, ceci donne :

$$\begin{aligned} \text{Arctan}(\tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y))) &= \text{Arctan}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right) \\ &\Leftrightarrow \\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) - \pi &= \text{Arctan}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right) \end{aligned}$$

C'est-à-dire que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } xy > 1 \text{ et } x > 0, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right) + \pi$$

(g) On suppose $xy > 1$, d'après la relation (★★), on a $\cos(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) < 0$, ainsi on a :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$$

De plus, on suppose dans cette question que $x < 0$, ce qui implique $\text{Arctan}(x) < 0$ et par suite $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) < \frac{\pi}{2}$.

On en déduit que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right[$.

Remarquons pour poursuivre le calcul le fait suivant : si $a \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right[$, on a : $a + \pi \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ et dans ce cas :

$$\text{Arctan}(\tan(a)) = \text{Arctan}(\tan(a + \pi)) = a + \pi.$$

Fort de ce résultat, appliquons la fonction arc tangente à la relation (★★★), ceci donne :

$$\begin{aligned} \text{Arctan}(\tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y))) &= \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \\ &\Leftrightarrow \\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) + \pi &= \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \end{aligned}$$

C'est-à-dire que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } xy > 1 \text{ et } x < 0, \text{ Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \pi$$

3. On a traité tous les cas dans les questions précédentes :

Résumons pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } xy = 1 \text{ et } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } xy = 1 \text{ et } x < 0 \\ \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) & \text{si } xy < 1 \\ \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + \pi & \text{si } xy > 1 \text{ et } x > 0 \\ \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \pi & \text{si } xy > 1 \text{ et } x < 0 \end{cases}$$

4. (a) On doit simplifier $\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$. On applique l'étude précédente à $x = \frac{1}{5}$ et $y = \frac{1}{5}$. Comme $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25} < 1$, on a, en se référant au résumé de la question précédente :

$$2\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)$$

D'où l'égalité :

$$2\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)$$

(b) On a ainsi : $4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = 2\text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)$. C'est la même méthode que précédemment puisque $\frac{5}{12} \times \frac{5}{12} < 1$:

$$2\text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{\frac{5}{12} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{5}{12} \times \frac{5}{12}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{\frac{10}{12}}{\frac{119}{144}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right)$$

On a démontré que :

$$4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right)$$

(c) On a $4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right) + \text{Arctan}\left(-\frac{1}{239}\right)$ d'après la question précédente. On utilise toujours les résultats de la question 3., on a $\frac{120}{119} \times -\frac{1}{239} < 1$, ainsi :

$$\text{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right) + \text{Arctan}\left(-\frac{1}{239}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \times \frac{1}{239}}\right) = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

C'est la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$$

Cette formule fut trouvée par John Machin en 1706, il l'utilisa pour calculer 100 décimales du nombre π , ce qui constituait le record à l'époque. Aujourd'hui, on connaît 12000 milliards de décimales de π .

F-Dérivons l'arctangente

1. (a) La fonction f est dérivable n fois sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après la remarque de l'énoncé et nous avons avec les formules de dérivation usuelles :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \quad \text{et} \quad f^{(3)}(x) = 2 \frac{3x^2 - 1}{(1+x^2)^3}$$

(b) i. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{H}_n : f^{(n)} : x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n} \quad \text{avec } P_n \text{ une fonction polynomiale}$$

Initialisation. On a : $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ ce qui démontre que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec $P_1 = 1$.

Hérédité. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a donc $f^{(n)} : x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$. D'après les formules de dérivation usuelles, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{P'_n(x)(1+x^2)^n - P_n(x)2nx(1+x^2)^{n-1}}{(1+x^2)^{2n}} = \frac{(1+x^2)P'_n(x) - 2nxP_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(x) = (1+x^2)P'_n(x) - 2nxP_n(x)$$

Il est clair que P_{n+1} est une fonction polynomiale, ce qui démontre $\mathcal{H}_{n+1}$ et termine la récurrence.

ii. Lors de la récurrence précédente, nous avons mis en évidence la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(x) = (1+x^2)P'_n(x) - 2nxP_n(x)$$

iii. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$\mathcal{H}_n$: $\exists Q_n$ une fonction polynomiale avec $\deg(Q_n) \leq n-2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = (-1)^{n-1}n!x^{n-1} + Q_n(x)$

Initialisation. La formule est correcte pour $n = 1$ en prenant $Q_1 = 0$ étant donné que $P_1 = 1$.

Hérédité. On suppose le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = (-1)^{n-1}n!x^{n-1} + Q_n(x)$$

et en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P'_n(x) = (-1)^{n-1}n!(n-1)x^{n-2} + Q'_n(x)$$

On remarque que si $n = 1$, le coefficient devant x^{n-2} est nul ce qui ne pose donc pas de problème d'écriture.

Or d'après la relation de la question précédente, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= (1+x^2)P'_n(x) - 2nxP_n(x) \\ &= (1+x^2)((-1)^{n-1}n!(n-1)x^{n-2} + Q'_n(x)) - 2nx((-1)^{n-1}n!x^{n-1} + Q_n(x)) \\ &= (-1)^{n-1}n!x^n((n-1) - 2n) + \underbrace{(-1)^{n-1}n!(n-1)x^{n-2} + (1+x^2)Q'_n(x) - 2nxQ_n(x)}_{=Q_{n+1}(x)} \\ &= (-1)^n(n+1)!x^n + Q_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on a $\deg(Q_n) \leq n-2$ ainsi $\deg(Q_{n+1}) \leq n-1$ comme voulu.

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence. Avec l'écriture proposée, on en déduit que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n-1$ et le coefficient dominant de P_n est $(-1)^{n-1}n!$

(c) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante :

$$\mathcal{H}_n : \forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2x(n+1)f^{(n+1)}(x) + n(n+1)f^{(n)}(x) = 0$$

• **Initialisation.** Pour $n = 1$, il s'agit de démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(1+x^2)f^{(3)}(x) + 6xf^{(2)}(x) + 2f'(x) = 0$$

Avec les valeurs de f' , f'' et $f^{(3)}$ obtenues à la question 1.(a), ceci est immédiat à vérifier.

• **Hérédité.** On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que la formule au rang n est vérifiée. Dérivons cette expression sachant que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, cela donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2xf^{(n+2)}(x) + (1+x^2)f^{(n+3)}(x) + 2(n+1)f^{(n+1)}(x) + 2x(n+1)f^{(n+2)}(x) + n(n+1)f^{(n+1)}(x) = 0$$

Ce qui donne bien en simplifiant et en regroupant les termes :

$$(1+x^2)f^{(n+3)}(x) + 2x(n+2)f^{(n+2)}(x) + (n+1)(n+2)f^{(n+1)}(x) = 0$$

C'est exactement la formule au rang $n+1$. Ce qui termine la récurrence.

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2x(n+1)f^{(n+1)}(x) + n(n+1)f^{(n)}(x) = 0$$

2. (a) Démontrons la formule annoncée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{H}_n : \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos(f(x))^n \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Initialisation. Pour $n = 1$, nous savons que $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Le membre de droite vaut :

$$0! \cos(f(x)) \sin\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2(f(x)) = \frac{1}{1 + \tan(f(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Ceci en utilisant les formules de trigonométrie :

$$\forall a \in \mathbb{R}, 1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)} \text{ et } \forall a \in \mathbb{R}, \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a)$$

Nous avons démontré la validité de $\mathcal{H}_1$.

Hérédité. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour un entier naturel $n \geq 1$ fixé. Il s'agit de dériver la formule donnée par $\mathcal{H}_n$, ce qui est possible car f , $\sin$ et $\cos$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (n-1)! \left(-nf'(x) \sin(f(x)) \cos(f(x))^{n-1} \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) + nf'(x) \cos(f(x))^n \cos\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \right) \\ &= n! f'(x) \cos(f(x))^{n-1} \left(-\sin(f(x)) \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) + \cos(f(x)) \cos\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \right) \\ &= n! f'(x) \cos(f(x))^{n-1} \left(\cos\left(f(x) + n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \right) \\ &= n! \cos^2(f(x)) \cos(f(x))^{n-1} \sin\left((n+1)\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (\star) \\ &= n! \cos(f(x))^{n+1} \sin\left((n+1)\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

($\star$) Pour ce passage, nous avons utilisé $f' = \cos(f)^2$, formule que nous avons vue dans l'initialisation ainsi que la relation trigonométrique classique : $\forall a \in \mathbb{R}, \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a)$.

Ceci démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos(f(x))^n \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

- (b) La fonction Arctan est à valeurs dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, intervalle sur lequel $\cos$ est strictement positive.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(f(x)) > 0$$

(c) D'après les deux questions précédentes, pour $n \geq 2$:

$$f^{(n)}(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, f(x) = \frac{(2k - n)\pi}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, f(x) = \frac{(2k - n)\pi}{2n} \quad (\star)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, x = \tan\left(\frac{(2k - n)\pi}{2n}\right)$$

($\star$) Pour justifier ce passage, il faut remarquer que la fonction f est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et :

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{(2k - n)\pi}{2n} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 2k\pi < 2n\pi \Leftrightarrow 0 < k < n$$

La fonction $\tan$ étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, elle ne prend pas deux fois la même valeur et nous avons trouvé nos $n - 1$ racines distinctes de $f^{(n)}$.

Les zéros de $f^{(n)}$ sont les $\tan\left(\frac{(2k - n)\pi}{2n}\right)$ avec $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

3. (a) Déjà la fonction φ est bien définie sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur ne s'annule pas puisque $a \notin \mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x + a} = \frac{1}{x + \alpha + i\beta} = \frac{x + \alpha - i\beta}{(x + \alpha)^2 + \beta^2} = \underbrace{\frac{x + \alpha}{(x + \alpha)^2 + \beta^2}}_{u(x)} + i \underbrace{\frac{-\beta}{(x + \alpha)^2 + \beta^2}}_{v(x)}$$

On voit ainsi que u et v sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ce qui va légitimer toutes les dérivations que nous allons effectuer dans la suite.

φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $(x + a)\varphi(x) = 1$, ce qui se traduit avec les notations de l'énoncé par :

$$(x + \alpha + i\beta)(u(x) + iv(x)) = 1$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires dans la relation précédente, nous avons :

$$\begin{cases} (x + \alpha)u(x) - \beta v(x) &= 1 & (1) \\ \beta u(x) + (x + \alpha)v(x) &= 0 & (2) \end{cases}$$

- (c) On trouve ces deux formules à partir des relations (1) et (2) en procédant de la même façon que dans la question 1.(c), c'est-à-dire à l'aide d'une récurrence et en dérivant la relation au rang n pour passer au rang $n + 1$.

$$\begin{cases} (x + \alpha)u^{(n)}(x) + nu^{(n-1)}(x) - \beta v^{(n)}(x) = 0 & (3) \\ \beta u^{(n)}(x) + (x + \alpha)v^{(n)}(x) + nv^{(n-1)}(x) = 0 & (4) \end{cases}$$

- (d) On réalise ensuite la combinaison (3) + i (4) pour obtenir, toujours pour $x \in \mathbb{R}$:

$$(x + \alpha + i\beta)u^{(n)}(x) + (-\beta + i(x + \alpha))v^{(n)}(x) + n(u^{(n-1)}(x) + iv^{(n-1)}(x)) = 0$$

ou encore en simplifiant :

$$(x + \alpha + i\beta)(u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x)) + n(u^{(n-1)}(x) + iv^{(n-1)}(x)) = 0$$

et en réutilisant la fonction φ :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, (x + a)\varphi^{(n)}(x) + n\varphi^{(n-1)}(x) = 0$$

- (e) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n : \varphi^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x + a)^{n+1}}$$

Initialisation. Pour $n = 0$, la formule est évidente.

Hérédité. On suppose le résultat vrai au rang $n - 1$ avec n un entier naturel non nul fixé.

D'après la relation trouvée à la question précédente, nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi^{(n)}(x) = -n\varphi^{(n-1)}(x) \times \frac{1}{x + a} = -n \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x + a)^n} \times \frac{1}{x + a} = \frac{(-1)^n n!}{(x + a)^{n+1}}$$

Ce qui termine la récurrence et démontre la formule souhaitée.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x + a)^{n+1}}$$

- (f) Pour $x \in \mathbb{R}$, on réalise la décomposition en éléments simples suivante :

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{(x - i)(x + i)} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i} \right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i} \right)$$

- (g) Il reste à appliquer la formule trouvée dans la question 3.(e) pour obtenir :

$$\forall n \geq 1, f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{2i} \left(\frac{1}{(x - i)^n} - \frac{1}{(x + i)^n} \right)$$