1-Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$.

2-Soit $q \in \mathbb{C}$ et $n \geq 4$, calculer $S = \sum_{k=3}^{n-1} q^k$.

3-Calculer $\sum_{k=0}^{n} k \times k!$ en faisant apparaitre une somme télescopique.

4-Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S = \sum_{k=n}^{2n} k^3$.

5-Soit $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k q^k$.

6-Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, démontrer que : $S = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - k} = \frac{n-1}{n}$.

7-★ Calculer $S = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$.

1-Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$.

Réponse : On reconnait directement une somme télescopique, ce qui donne :

$$S = \sqrt{n} - \sqrt{0} = \sqrt{n}$$

2-Soit $q \in \mathbb{C}$ et $n \geq 4$, calculer $S = \sum_{k=3}^{n-1} q^k$.

Réponse : Dans le cas particulier où $q = 1$, on a : $S = n - 3$. Pour $q \neq 1$, on pose $i = k - 3$:

$$\sum_{k=3}^{n-1} q^k = \sum_{i=0}^{n-4} q^{i+3} = q^3 \sum_{i=0}^{n-4} q^i = q^3 \frac{q^{n-3} - 1}{q - 1}$$

3-Calculer $\sum_{k=0}^{n} k \times k!$ en faisant apparaitre une somme télescopique.

Réponse : En faisant apparaître une somme téléscopique, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k \times k! &= \sum_{k=0}^{n}(k+1-1) \times k! \\
&= \sum_{k=0}^{n}((k+1) \times k! - k!) \\
&= \sum_{k=0}^{n}((k+1)! - k!) \\
&= (n+1)! - 0! \\
&= (n+1)! - 1
\end{aligned}$$

4-Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S = \sum_{k=n}^{2n} k^3$.

Réponse : On a :

$$S = \sum_{k=1}^{2n} k^3 - \sum_{k=1}^{n-1} k^3$$

Avec la formule du cours :

$$S = \frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$$

En développant et en simplifiant, on trouve :

$$S = \frac{n^2(15n^2 + 18n + 3)}{4}$$

5-Soit $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k q^k$.

Réponse : • Si $q \neq -1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k q^k = \sum_{k=1}^{n} (-q)^k = -q \times \frac{(-q)^n - 1}{-q - 1} = q \times \frac{(-q)^n - 1}{q + 1}$$

• Si $q = -1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k q^k = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

6-Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, démontrer que :

$$S = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - k} = \frac{n-1}{n}$$

Réponse : Démontrons l'égalité annoncée par récurrence sur $n \geq 2$.

• **Initialisation.** Pour $n = 2$, il n'y a qu'un seul terme dans la somme qui vaut bien $\frac{1}{2}$.

• **Hérédité.** On suppose la formule vérifiée à un rang $n \geq 2$ fixé, démontrons-là au rang $n+1$. On a :

$$S = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2 - k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - k} + \frac{1}{(n+1)^2 - (n+1)}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, nous savons calculer la première somme :

$$S = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2 - (n+1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n^2+n} = \frac{n}{n+1}$$

Ce qui constitue bien la formule voulue au rang $n+1$ et termine la récurrence. On conclut :

$$\forall n \geq 2, \ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} = \frac{n-1}{n}$$

Une autre méthode consiste à faire apparaitre une somme télescopique de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{n-1}{n}
\end{aligned}$$

7-Calculer $S = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Réponse : • Supposons que n est pair, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p$. Dans ce cas :

$$S = \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k k^2 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2p} (-1)^k k^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2p} (-1)^k k^2$$

Quand k est pair et $k \in [\![1, 2p]\!]$, on peut l'écrire $k = 2i$ pour $i \in [\![1, p]\!]$.
Quand k est impair et $k \in [\![1, 2p]\!]$, on peut l'écrire $k = 2i + 1$ pour $i \in [\![0, p-1]\!]$.

On obtient :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{p}(-1)^{2i}(2i)^2 + \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{2i+1}(2i+1)^2 \\
&= 4\sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=0}^{p-1}(4i^2+4i+1) \\
&= \left(4\sum_{i=1}^{p} i^2 - 4\sum_{i=0}^{p-1} i^2\right) - 4\sum_{i=0}^{p-1} i - \sum_{i=0}^{p-1} 1 \\
&= 4p^2 - 4\frac{(p-1)p}{2} - p = 2p^2 + p = 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

- Supposons n impair, on peut écrire $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{2p+1} (-1)^k k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k k^2 + (-1)^{2p+1}(2p+1)^2 \\ &= 2p^2 + p - (2p+1)^2 = -2p^2 - 3p - 1 \\ &= -2\Big(\frac{n-1}{2}\Big)^2 - 3\Big(\frac{n-1}{2}\Big) - 1 = -\frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$S = \begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\dfrac{n(n+1)}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Ce que l'on peut synthétiser en :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$