1-Dans le magma $(\mathbb{N}, +)$ exhiber un élément régulier et non inversible.

2-Soit E un ensemble, on considère la loi $\cup$ sur $\mathcal{P}(E)$. Donner l'élément neutre de cette loi. Quels sont les éléments inversibles ? Quels sont les éléments réguliers ?

3-Dans un monoïde, deux éléments inversibles distincts peuvent-ils avoir le même inverse ?

4-Soit $(E, \star)$ un monoïde. Vrai ou faux : si $a \in E$ est son propre inverse alors a est l'élément neutre de E.

5-On se place dans $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ muni de la composition. On pose $S : n \mapsto n + 1$ définie sur $\mathbb{N}$. Donner un inverse à gauche de S. Montrer que S n'a pas d'inverse à droite.

1-Dans le magma $(\mathbb{N}, +)$ exhiber un élément régulier et non inversible.

Réponse : Cette loi est commutative. L'élément 2 est régulier car :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ 2 + m = 2 + n \Rightarrow m = n$$

Pourtant 2 n'est pas inversible car $-2 \notin \mathbb{N}$.

2-Soit E un ensemble, on considère la loi $\cup$ sur $\mathcal{P}(E)$. Donner l'élément neutre de cette loi. Quels sont les éléments inversibles ? Quels sont les éléments réguliers ?

Réponse : Cette loi est associative et commutative.

• Pour toute partie A de E, on a : $A \cup \emptyset = A$ ainsi $\emptyset$ est l'élément neutre de $\cup$.

• Soit A une partie de E inversible, il existe A' une partie de E telle que : $A \cup A' = \emptyset$. Ce qui implique que $A = \emptyset$, ainsi l'ensemble vide est le seul élément inversible.

• $\emptyset$ est régulier car inversible. Soit A une partie non vide de E avec $a \in A$, on a : $A \cup \emptyset = A \cup \{a\}$ pourtant $\emptyset \neq \{a\}$, ce qui démontre que A n'est pas régulier. L'ensemble vide est le seul élément régulier du monoïde.

3-Dans un monoïde, deux éléments inversibles distincts peuvent-ils avoir le même inverse ?

Réponse : Soient x et y deux éléments inversibles du monoïde, on suppose que $x^{-1} = y^{-1}$. En prenant l'inverse, il vient :

$$(x^{-1})^{-1} = (y^{-1})^{-1} \text{ c'est-à-dire : } x = y$$

Deux éléments qui ont le même inverse sont donc égaux.

4-Soit $(E, \star)$ un monoïde. Vrai ou faux : si $a \in E$ est son propre inverse alors a est l'élément neutre de E.

Réponse : C'est faux. Reprenons l'exemple introductif du cours : $\{\mathrm{id}, r_1, r_2, s_A, s_B, s_C\}$ muni de la composition, c'est bien une loi associative qui possède un élément neutre : id. On a : $s_A \circ s_A = \mathrm{id}$ donc s_A est son propre inverse, pourtant s_A n'est pas l'élément neutre de ce magma.

Autre exemple : dans $(\mathbb{Z}, \times)$, on a : $-1 \times -1 = 1$ donc -1 est son propre inverse.

5-On se place dans $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ muni de la composition. On pose $S : n \mapsto n+1$ définie sur $\mathbb{N}$. Donner un inverse à gauche de S. Montrer que S n'a pas d'inverse à droite.

Réponse : On pose :

$$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 17 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{si } n > 0 \end{cases} \end{array}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $T(S(n)) = T(n+1) = (n+1) - 1 = n$. Ainsi $T \circ S = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Ce qui démontre que T est un inverse à gauche de S et il y en a une infinité puisque la valeur 17 est arbitraire.

Par contre, S n'a pas d'inverse à droite, en effet supposons par l'absurde que $S \circ T = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ où T est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On a en particulier $S(T(0)) = 0$ ce qui est absurde car S ne prend pas la valeur 0.