Exercice 1

Le but de cet exercice est de démontrer puis d'appliquer le théorème de Cesàro :

Théorème de Cesàro :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On définit, à partir de (u_n), une nouvelle suite dont le terme général est donné par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Si (u_n) converge vers un réel l, alors (v_n) converge vers l.

Toutes les suites considérées dans cet exercice sont définies à partir de l'indice $n = 1$.

1. On suppose dans cette question que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   (a) On fixe $\varepsilon > 0$ un réel, montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait :

   $$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   (b) Montrer qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on ait :

   $$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   (c) En déduire que la suite (v_n) tend vers 0.

2. En se ramenant au cas particulier précédent, démontrer le théorème de Cesàro. Donner un contre-exemple montrant que la réciproque du théorème est fausse.
3. Montrer que si la suite (u_n) tend vers $+\infty$ alors (v_n) tend vers $+\infty$.
4. Voyons à présent quelques applications du théorème de Cesàro.

   (a) Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = l$ où $l \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{nl} = 1$.

   (b) Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la suite $(u_n^{\frac{1}{n}})$ converge aussi vers l. On pourra considérer la suite $(\ln(u_n))$.

   Les deux questions qui suivent sont des applications de la question 4.(b).

   (c) Etudier la convergence de la suite définie pour tout $n \geq 1$ par : $w_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{n}}$.

   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$.

Exercice 2

Nous allons démontrer une version du théorème du point fixe de Banach-Picard qui s'énonce ainsi :

Théorème de Banach-Picard :

Soit I un intervalle fermé, $k \in [0, 1[$ et $f : I \to I$ une fonction vérifiant :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

alors la fonction f admet un unique point fixe. De plus, toute suite (u_n) telle que $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.

1. Justifier que la suite (u_n) de l'énoncé est correctement définie.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - u_0| \leq \dfrac{1}{1-k}|u_1 - u_0|$. En déduire que la suite (u_n) est bornée.
4. Justifier l'existence d'une extractrice φ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers un réel l appartenant à I.
5. Grâce à une majoration bien choisie de $|f(l) - l|$, montrer que l est un point fixe de f.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$. En déduire que (u_n) converge vers l.
7. Montrer que le point fixe de f trouvé à la question précédente est unique.

Un point fixe d'une fonction f est un réel a tel que $f(a) = a$.