

1-Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{th}(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{ch}(x)}{x}$.

2-Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$.

3-Démontrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \text{ch}(a) + \text{ch}(b) = 2\text{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

4-Trouver une expression explicite de la bijection réciproque de ch définie de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$.

5-Avec une solution particulière, résoudre $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}$.

6-★ Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{Arctan}(\text{sh}(x)) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)$.

1-Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{th}(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{ch}(x)}{x}$.

Réponse : Les fonctions sh et th étant dérivables sur $\mathbb{R}$, on reconnaît des limites de taux de variations :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(x) - \text{sh}(0)}{x - 0} = \text{sh}'(0) = \text{ch}(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{th}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{th}(x) - \text{th}(0)}{x - 0} = \text{th}'(0) = \frac{1}{\text{ch}^2(0)} = 1$$

La dernière limite n'est pas une forme indéterminée :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{ch}(x)}{x} = +\infty$$

2-Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$.

Réponse : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})} = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \frac{e^{2x} + 1 - 2}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

3-Démontrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \operatorname{ch}(a) + \operatorname{ch}(b) = 2\operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Réponse : En utilisant la technique de l'angle moitié, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(a) + \operatorname{ch}(b) &= \frac{1}{2} \left(e^a + e^b + e^{-a} + e^{-b} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{a+b}{2}} \left(e^{\frac{a-b}{2}} + e^{-\frac{a-b}{2}} \right) + e^{-\frac{a+b}{2}} \left(e^{\frac{a-b}{2}} + e^{-\frac{a-b}{2}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(e^{\frac{a+b}{2}} + e^{-\frac{a+b}{2}} \right) 2\operatorname{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right) \right) \\ &= 2\operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right)\end{aligned}$$

4-Trouver une expression explicite de la bijection réciproque de ch définie de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$.

Réponse : Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in [1, +\infty[$, on a :

$$y = \text{ch}(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

On pose $X = e^x$ pour obtenir une équation de degré 2 :
 $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Cette équation a deux solutions :

$$X_1 = y + \sqrt{y^2 - 1} \text{ et } X_2 = y - \sqrt{y^2 - 1}$$

C'est X_1 qui convient car $X_1 \geq 1$ puisque $y \geq 1$. On en déduit :

$$\forall y \in [1, +\infty[, \text{ch}^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

5-Avec une solution particulière, résoudre :

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}$$

Réponse : À l'aide des valeurs remarquables de la fonction Arctan , on remarque que $x = 1$ est solution. D'autre part, la fonction présente dans le membre de gauche est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que $x = 1$ est l'unique solution de l'équation sur $\mathbb{R}$.

6-Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

Réponse : On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$x \mapsto \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) - \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right).$$

- Les fonctions sh et Arctan sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+$, ainsi $x \mapsto \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{ch}(x) \geq 1$ ainsi $\frac{1}{\operatorname{ch}}$ est à valeurs dans $[0, 1]$. La fonction Arccos étant définie sur $[-1, 1]$, on en déduit que

$$x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right) \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+ \text{ (et même sur } \mathbb{R}\text{)}.$$

Par contre la fonction Arccos est dérivable sur $] - 1, 1[$ ainsi

$$x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ car } \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Finalement, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) &= \frac{\operatorname{ch}(x)}{1 + \operatorname{sh}(x)^2} - \left(-\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)^2} \right) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(x)^2}}} \right) \\ &= \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}(x)^2} - \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)^2} \frac{\operatorname{ch}(x)}{\sqrt{\operatorname{ch}(x)^2 - 1}} = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}(x)^2} - \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)^2} \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} = 0\end{aligned}$$

Au cours de ce calcul, nous avons utilisé la formule de trigonométrie hyperbolique : $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$.

Ainsi la fonction f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est égale à sa limite en $+\infty$ qui vaut 0. On vérifie également que $f(0) = 0$ pour en déduire l'égalité souhaitée sur $\mathbb{R}_+$.