Problème 1

A-Préliminaires et premiers exemples

Le but de cette partie est de se familiariser avec les notations introduites en étudiant tout d'abord un exemple de suite qui n'est pas dense dans $[0,1[$. Dans la question 3., on met en évidence un critère qui garantit que certaines suites, dites à croissance lente, sont denses dans $[0,1[$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x-1<\lfloor x\rfloor \leq x \Leftrightarrow -x \leq -\lfloor x\rfloor < 1-x \Leftrightarrow 0 \leq x-\lfloor x\rfloor < 1$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ M(x) \in [0,1[}$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $nx \in \mathbb{Z}$, d'où :

$$u_n = M(nx) = nx - \lfloor nx\rfloor = nx - nx = 0$$

$$\boxed{\text{Si } x \in \mathbb{Z},\ \text{alors } (u_n) \text{ est la suite nulle}}$$

(b) i. On a les premiers termes de la suite u_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_n	0	0,4	0,8	0,2	0,6	0	0,4	0,8	0,2	0,6	0	0,4

La suite (u_n) semble être périodique, avec une période de longueur 5 : 0, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$, il s'agit de démontrer que $u_{n+q} = u_n$. On a :

$$u_{n+q} = (n+q)\frac{p}{q} - \left\lfloor (n+q)\frac{p}{q}\right\rfloor = n\frac{p}{q} + p - \left\lfloor n\frac{p}{q} + p\right\rfloor = n\frac{p}{q} + p - \left\lfloor n\frac{p}{q}\right\rfloor - p = n\frac{p}{q} - \left\lfloor n\frac{p}{q}\right\rfloor = u_n$$

iii. La suite (u_n) étant périodique de période q, elle prend au plus q valeurs distinctes (exactement q valeurs si p et q sont premiers entre eux). Il est clair qu'il est possible de trouver, dans l'intervalle $[0,1[$, $q+1$ intervalles non triviaux et disjoints par exemple la famille d'intervalles $\left[\frac{2i}{2(q+1)}, \frac{2i+1}{2(q+1)}\right]$ où $0 \leq i \leq q$.

Etant donné que la suite (u_n) prend au plus q valeurs, il y aura l'un de ces $q+1$ intervalles qui ne contiendra pas de terme de la suite (u_n). Ce qui démontre que (u_n) n'est pas dense dans $[0,1[$.

$$\boxed{\text{Si } x \in \mathbb{Q} \text{ alors la suite } (M(nx)) \text{ n'est pas dense dans } [0,1[}$$

La réciproque de cette proposition sera démontrée à la question 2. de la partie B.

3. (a) i. La suite (n^2) est croissante et tend vers $+\infty$ mais $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ ne tend pas vers 0.

$$\boxed{(n^2) \text{ n'est pas à croissance lente}}$$

ii. La suite $(\sqrt{n})$ est croissante et tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la quantité conjuguée, il vient :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{(\sqrt{n}) \text{ est à croissance lente}}$$

iii. La suite $(\ln(n))_{n\geq 1}$ est croissante et tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

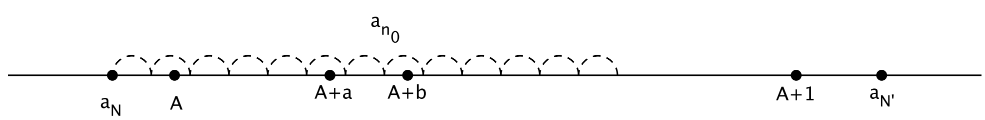
$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{(\ln(n))_{n\geq 1} \text{ est à croissance lente}}$$

(b) i. C'est exactement la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, étant donné que $a < b$, on a bien $\varepsilon > 0$.

ii. La suite (a_n) tend vers $+\infty$, d'où l'existence de $N' \geq N$ tel que $u_{N'} \geq A + 1$.

iii. L'idée est la suivante : $a_N < A$ par définition de A et $a_{N'} \geq A + 1$ avec $N' \geq N$. Or, à partir du rang N, la différence entre deux termes consécutifs de la suite (a_n) est inférieure ou égale à ε, la suite étant croissante, il y aura nécessairement un terme de la suite qui va tomber dans l'intervalle $[A + a, A + b]$ puisque cet intervalle est de longueur 2ε. Ainsi il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} \in [A + a, A + b]$.



Vous aurez remarqué que l'hypothèse de croissance de la suite (a_n) clarifie la situation mais n'est pas nécessaire.

iv. Comme A est un entier, que $0 \leq a < b \leq 1$ et que $a_{n_0} \in [A + a, A + b]$, on a $\lfloor a_{n_0} \rfloor = A$. Ainsi :

$$A + a \leq a_{n_0} \leq A + b \Leftrightarrow A + a - A \leq a_{n_0} - \lfloor a_{n_0} \rfloor \leq A + b - A \Leftrightarrow a \leq M(a_{n_0}) \leq b$$

En résumé, pour tous $(a, b) \in [0, 1[^2$ tels que $0 \leq a < b < 1$, on a trouvé $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M(a_{n_0}) \in [a, b]$, ceci est la définition de :

$$\boxed{(M(a_n)) \text{ est dense dans } [0, 1[}$$

v. D'après la question 3.(a), les suites $(\sqrt{n})$ et $(\ln(n))_{n\geq 1}$ sont à croissance lente, ainsi $(M(\sqrt{n}))$ et $(M(\ln(n)))$ sont deux suites denses dans $[0, 1[$.

B-Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Cette partie est consacrée à la caractérisation des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$, c'est une partie assez technique qui demande une bonne maîtrise de la notion de borne inférieure. Le résultat démontré sera utilisé pour poursuivre l'étude de la densité de certaines suites.

1. Vérifions les conditions requises pour avoir un sous-groupe.
   - Par définition : $\alpha\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.
   - L'élément neutre de l'addition s'écrit $0 = \alpha \times 0$ avec $0 \in \mathbb{Z}$, donc $0 \in \alpha\mathbb{Z}$.
   - Soient $(a, b) \in (\alpha\mathbb{Z})^2$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $a = \alpha p$ et $b = \alpha q$. Ainsi :

$$a - b = \alpha(p - q) \in \alpha\mathbb{Z}, \text{ car } p - q \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\alpha\mathbb{Z} \text{ est un sous-groupe additif de } \mathbb{R}}$$

2. C'est du cours, $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ car :
   ▶ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
   ▶ $0 \in \mathbb{Q}$.
   ▶ Si $(r, r') \in \mathbb{Q}^2$ alors $r - r' \in \mathbb{Q}$.
   Montrons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour cela donnons-nous $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ avec $c < d$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N(d-c) > 1$. L'intervalle $[cN, dN]$ est de longueur supérieure à 1 d'où l'existence de $p \in \mathbb{Z}$ tel que $cN \leq p \leq dN$. Ainsi le rationnel $\dfrac{p}{N} \in [c, d]$, ce qui démontre le résultat.

$$\boxed{\mathbb{Q} \text{ est un sous-groupe additif dense dans } \mathbb{R}}$$

3. (a) Le sous-groupe H n'étant pas réduit au singleton $\{0\}$, il existe $x \in H$ tel que $x \neq 0$. Si $x > 0$ alors $H \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide. Si $x < 0$, on a $-x \in H$ puisque H est stable par passage à l'opposé et dans ce cas aussi $H \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide. D'après la propriété de la borne inférieure, étant donné que $H \cap \mathbb{R}_+^*$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée par 0, elle possède une borne inférieure.

$$\boxed{a = \inf(H \cap \mathbb{R}_+^*)}$$

   (b) Le réel 0 est un minorant de $H \cap \mathbb{R}_+^*$ et par définition de la borne inférieure, a est le plus grand des minorants de $H \cap \mathbb{R}_+^*$, d'où :

$$\boxed{a \geq 0}$$

4. (a) Comme $a > 0$, on a $2a > a$ ainsi $2a$, qui est supérieur strictement au plus grand des minorants de $H \cap \mathbb{R}_+^*$, n'est pas un minorant de $H \cap \mathbb{R}_+^*$. Il existe $x_1 \in H \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $x_1 < 2a$ et comme a est un minorant de $H \cap \mathbb{R}_+^*$, il vient :

$$\boxed{a \leq x_1 < 2a}$$

   (b) C'est exactement le même raisonnement qu'à la question précédente, si $x_1 > a$, alors x_1 n'est pas un minorant de $H \cap \mathbb{R}_+^*$, donc il existe $x_2 \in H \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\boxed{a \leq x_2 < x_1 < 2a}$$

   (c) D'après l'inégalité précédente, on a : $0 < x_1 - x_2 < 2a - a = a$. Or $x_1 - x_2$ est un élément de H puisque $(x_1, x_2) \in H^2$ et H est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Finalement $x_1 - x_2 \in H \cap \mathbb{R}_+^*$ mais $x_1 - x_2 < a$, ceci est absurde puisque a est un minorant de $H \cap \mathbb{R}_+^*$.
   En résumé, on a $x_1 \geq a$ mais $x_1 > a$ est absurde, c'est donc que $x_1 = a$ et par suite :

$$\boxed{a \in H}$$

   (d) Soit $k \in \mathbb{Z}$, montrons que $ak \in H$.
   ▶ Si $k = 0$, on a $0 \in H$ car H est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
   ▶ Si $k \geq 1$, on a $ak = \underbrace{a + a ... + a}_{k \text{ fois}}$, donc ak est bien un élément de H puisque $a \in H$ et H est stable par somme.
   ▶ Si $k \leq -1$, on a d'après le calcul ci-dessus $a(-k) \in H$ et comme H est stable par passage à l'opposé cela implique que $ak \in H$.

$$\boxed{a\mathbb{Z} \subset H}$$

(e) Pour tout $x \in H$, on a :

$$\frac{x}{a} - 1 < \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \leq \frac{x}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x - a < a\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \leq x$$
$$\Leftrightarrow \quad -x + a > -a\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \geq -x$$
$$\Leftrightarrow \quad a > x - a\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \geq 0$$

Ce qui démontre que $x - a\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \in [0, a[$, d'après la question précédente : $a\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \in a\mathbb{Z} \subset H$. Comme H est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, on a $x - a\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \in H \cap \mathbb{R}_+$ et cette expression est inférieure strictement à a, d'où : $x - a\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = 0$ et par suite $x = a\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \in a\mathbb{Z}$.

(f) Les deux questions précédentes démontrent que :

$$\boxed{a\mathbb{Z} = H}$$

5. (a) On a $d - c > 0 = a$ donc $d - c$ n'est pas un minorant de $H \cap \mathbb{R}_+^*$. Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe } x \in H \cap \mathbb{R}_+^*, \text{ tel que } 0 < x < d - c}$$

(b) L'idée est la suivante : les multiples entiers de x consécutifs sont à une distance inférieure strictement à $d - c$ les uns des autres. Il y a donc au moins l'un de ces multiples qui tombe dans l'intervalle $[c, d]$. Pour donner une rédaction plus précise, on considère les différents cas suivants :

► Si $c \leq 0 \leq d$, $0 \in [c, d] \cap H$.

► Si $0 \leq c < d$, on pose $A = \{k \in \mathbb{N},\ kx \geq d\}$. L'ensemble A est une partie non vide de $\mathbb{N}$ car $x > 0$ et $\mathbb{R}$ est archimédien, donc A possède un minimum que nous notons k_0. On a $k_0 x \geq d$ et $(k_0 - 1)x < d$ puisque $k_0 - 1 \notin A$.

D'autre part :

$$k_0 x \geq d \Leftrightarrow k_0 x - x \geq d - x > c$$

Ce qui démontre que $(k_0 - 1)x \in [c, d] \cap H$.

► Si $c < d \leq 0$, d'après l'étude précédente : $[-d, -c] \cap H \neq \emptyset$. Comme H est stable par passage à l'opposé on a également : $[c, d] \cap H \neq \emptyset$.

Dans tous les cas :

$$\boxed{[c, d] \cap H \neq \emptyset}$$

6. Dans la question précédente, on a démontré que si $a = 0$ alors H est dense dans $\mathbb{R}$. Dans la question 4., on a démontré que si $a > 0$ alors H est monogène. Enfin si $H = \{0\}$, alors $H = 0\mathbb{Z}$ et c'est également un groupe monogène.

$$\boxed{\text{Tout sous-groupe additif de } \mathbb{R} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \text{ ou monogène}}$$

C-Application à l'étude de la suite $(\cos(n))$

Dans cette partie, on démontre que la suite $(\cos(n))$ *est dense dans* $[-1,1]$*, ce qui implique que tous les réels de cet intervalle sont des valeurs d'adhérence de la suite.*

1. (a) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\cos(x)+\cos(y)=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

En appliquant cette formule à $x=n+1$ et $y=n-1$, il vient :

$$\boxed{\forall n\geq 1,\ u_{n+1}+u_{n-1}=2u_n\cos(1)}$$

(b) Puisque l'on a supposé que (u_n) tend vers l, les suites (u_{n+1}) et $(u_{n-1})_{n\geq 1}$ convergent également vers l, en passant à la limite dans la relation précédente, on a : $2l=2l\cos(1)$. Etant donné que $\cos(1)\neq 0$, on a :

$$\boxed{l=0}$$

(c) La relation $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$ est valable pour tout x réel, appliquée à $x=n$ cela donne :

$$\boxed{u_{2n}=2u_n^2-1}$$

(d) On passe à la limite dans la relation précédente, on obtient : $l=2l^2-1$. Sachant que $l=0$, on a l'absurdité recherchée, ce qui démontre que :

$$\boxed{(\cos(n))\text{ diverge}}$$

2. (a) On vérifie les conditions requises :
   - ▶ Par définition : $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$.
   - ▶ $0\in\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$.
   - ▶ Soit $(r,r')\in(\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z})^2$, il existe $(p,q,p',q')\in\mathbb{Z}^4$ tels que $r=p+2\pi q$ et $r'=p'+2\pi q'$. Ainsi :

$$r-r'=(p+2\pi q)-(p'+2\pi q')=(p-q)+2\pi(p'-q')\in\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$$

$$\boxed{\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}\text{ est un sous-groupe additif de }\mathbb{R}}$$

(b) Supposons que $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ s'écrive $\alpha\mathbb{Z}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$. On a :

$$1\in\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}\ (p=1,\ q=0),\ \text{donc }\exists k\in\mathbb{Z}^*,\ \text{tel que }1=\alpha k$$

$$2\pi\in\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}\ (p=0,\ q=1),\ \text{donc }\exists k'\in\mathbb{Z}^*,\ \text{tel que }2\pi=\alpha k'$$

Ceci implique, en faisant le quotient, que $\pi=\dfrac{k'}{2k}\in\mathbb{Q}$ ce qui est absurde.

D'après le résultat démontré dans la partie B, comme $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ qui n'est pas monogène, c'est que :

$$\boxed{\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}\text{ est dense dans }\mathbb{R}}$$

(c) Si $x\in\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$, il existe $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $x=p+2\pi q$, la fonction cosinus étant 2π-périodique et paire, il vient :

$$\cos(x)=\cos(p+2\pi q)=\cos(p)=\cos(|p|)\in Y\text{ car }|p|\in\mathbb{N}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z},\ \cos(x)\in Y}$$

(d) Soit $(c,d) \in [-1,1]^2$ tels que $c < d$, montrons qu'il existe $y \in Y$ tel que $c \leq y \leq d$. La fonction arccosinus est strictement décroissante, donc $\arccos(d) < \arccos(c)$. À la question 2.(b), nous avons démontré que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, ainsi il existe $x \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ tel que $\arccos(d) \leq x \leq \arccos(c)$. Par suite : $c \leq \cos(x) \leq d$, or $\cos(x) \in Y$, on a bien démontré que :

$$\boxed{(\cos(n)) \text{ est dense dans } [-1,1]}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a l'intervalle $\left[l - \dfrac{1}{n}, l + \dfrac{1}{n}\right]$ qui peut être partagé en un nombre quelconque d'intervalles non triviaux disjoints (une description explicite d'un tel partage a été faite à la question 2.(b).iii de la partie A), comme Y est dense dans $[-1,1]$, la suite $(\cos(n))$ visite chacun de ces intervalles, ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left[l - \frac{1}{n}, l + \frac{1}{n}\right] \cap Y \text{ est infini}}$$

On va construire l'extractrice φ par récurrence :

▶ On choisit pour $\varphi(0)$ un entier quelconque.

▶ Supposons avoir donné $\varphi(0), ..., \varphi(n)$ pour un entier naturel n. L'ensemble $\left[l - \dfrac{1}{n+1}, l + \dfrac{1}{n+1}\right] \cap Y$ est infini, il existe ainsi $k > \varphi(n)$ tel que $\cos(k) \in \left[l - \dfrac{1}{n+1}, l + \dfrac{1}{n+1}\right]$. On pose $\varphi(n+1) = k$. Par construction, l'application φ est strictement croissante et pour tout $n \geq 1$: $\cos(\varphi(n)) \in \left[l - \dfrac{1}{n}, l + \dfrac{1}{n}\right]$ ce qui démontre que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \cos(\varphi(n)) = l}$$

D-Etude de la suite $(M(nx))$

Dans cette partie, on démontre que $(M(nx))$ est dense dans $[0,1[$ si et seulement si x est irrationnel.

1. C'est exactement la même démarche qu'aux questions 2.(a) et 2.(b) de la partie C en remplaçant 2π par x qui est également irrationnel.

$$\boxed{\mathbb{Z} + x\mathbb{Z} \text{ est dense dans } \mathbb{R}}$$

2. Donnons-nous $0 \leq a < b < 1$ et tentons de trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M(n_0 x) \in [a,b]$. D'après la question précédente, il existe $p + xq \in [a,b]$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$. C'est-à-dire que $xq \in [a-p, b-p]$, donc que $M(xq) \in [a,b]$. On peut toujours se ramener à prendre $q \geq 0$, puisque $\mathbb{Z} + x\mathbb{N}$ est également dense dans $\mathbb{R}$, en adaptant la démonstration proposée à la question 5. de la partie B.

   Ainsi en prenant $q = n_0$, on a bien $M(n_0 x) \in [a,b]$. Ce qui démontre en recoupant le résultat obtenu avec celui de la question 2. de la partie A, que :

$$\boxed{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Leftrightarrow (M(nx)) \text{ dense dans } \mathbb{R}}$$

3. (a) Raisonnons par l'absurde en supposant que $\log(2) = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On applique à cette relation la fonction réciproque de log : $x \mapsto 10^x$ cela donne : $2 = 10^{\frac{p}{q}}$. Ceci implique que $2^q = 10^p = 2^p \times 5^p$, par unicité de la décomposition en facteurs premiers, il est nécessaire que $p = 0$, ce qui est absurde.

$$\boxed{\log(2) \text{ est irrationnel}}$$

(b) Soit a un entier naturel non nul d'écriture en base 10 : $a = [a_p a_{p-1} ... a_1 a_0]$ où $p \in \mathbb{N}$ et où les $(a_i)_{0 \leq i \leq p}$ sont des chiffres. L'écriture en base 10 du nombre 2^n commence par a si et seulement s'il existe un entier naturel k tel que :

$$a \times 10^k \leq 2^n < (a+1) \times 10^k \Leftrightarrow k + \log(a) \leq n \log(2) < k + \log(a+1)$$

C'est-à-dire que :

$$\log(a) - \lfloor \log(a) \rfloor \leq n \log(2) - \lfloor n \log(2) \rfloor < \log(a+1) - \lfloor \log(a+1) \rfloor \qquad (\star)$$

sauf dans le cas où $a+1$ est une puissance de 10 le membre de droite devant être alors remplacé par 1. Comme $\log(2)$ est irrationnel, la suite $M(n \log(2))$ est dense dans $[0, 1[$, il est ainsi possible de trouver un entier n vérifiant la condition $(\star)$ et par suite 2^n commence par la séquence a.

$$\boxed{\text{Pour toute séquence de chiffres, il existe une puissance de 2 commençant par cette séquence}}$$

E-Nombre d'or et nombres de Pisot

On démontre notamment dans cette partie que les puissances du nombre d'or sont de plus en plus proches des entiers.

1. On suit l'énoncé en utilisant une récurrence double. On considère l'hypothèse de récurrence valable pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n \ : \ \varphi^n + \frac{1}{(-\varphi)^n} \in \mathbb{N}$$

▶ On a $\varphi^0 + \dfrac{1}{(-\varphi)^0} = 2 \in \mathbb{N}$. D'autre part :

$$\varphi + \frac{1}{-\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$$

Ainsi $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vérifiées.

▶ Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ sont vraies, on a :

$$\left(\varphi^{n+1} + \frac{1}{(-\varphi)^{n+1}}\right)\left(\varphi + \frac{1}{-\varphi}\right) = \varphi^{n+2} + \frac{1}{(-\varphi)^{n+2}} - \varphi^n - \frac{1}{\varphi^n}$$

C'est-à-dire que :

$$\varphi^{n+2} + \frac{1}{(-\varphi)^{n+2}} = \underbrace{\left(\varphi^{n+1} + \frac{1}{(-\varphi)^{n+1}}\right)}_{\in \mathbb{N} \text{ avec } \mathcal{H}_{n+1}} \underbrace{\left(\varphi + \frac{1}{-\varphi}\right)}_{=1} + \underbrace{\varphi^n + \frac{1}{\varphi^n}}_{\in \mathbb{N} \text{ avec } \mathcal{H}_n}$$

Ce qui démontre l'hypothèse au rang $n+2$ et achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \varphi^n + \frac{1}{(-\varphi)^n} \in \mathbb{N}}$$

2. Au cours de la question précédente, nous avons vu que : $-\dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Etant donné que $2 < \sqrt{5} < 3$, on a $\left| -\dfrac{1}{\varphi} \right| < 1$ et par suite $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n = 0$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(-\varphi)^n} = 0}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $b_n = \varphi^n + \dfrac{1}{(-\varphi)^n}$ qui est un entier d'après la question 1.(a). On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \varphi^n - \lfloor \varphi^n \rfloor = \left(b_n - \frac{1}{(-\varphi)^n}\right) - \left\lfloor b_n - \frac{1}{(-\varphi)^n} \right\rfloor$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1} = 0$. Ainsi, par définition de la limite :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ v_n \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right[$$

On utilise le principe vu à la question 2.(b)iii. de la partie A, en partageant l'intervalle $\left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[$ en $N+1$ intervalles disjoints.
Les N premiers termes de la suite ne peuvent visiter chacun des $N+1$ intervalles disjoints et les termes d'indices supérieurs à N n'appartiennent pas à $\left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[$. Ce qui montre que (v_n) n'est pas dense dans $[0,1[$.

$$\boxed{(v_n) \text{ n'est pas dense dans } [0,1[}$$

Problème 2

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, I_a est inclus dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par définition. Il reste à vérifier les trois conditions requises pour que I_a soit un idéal :
   ▶ i) Notons θ la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a $\theta(a) = 0$ ainsi $\theta \in I_a$.
   ▶ ii) Soient $(f, g) \in I_a^2$, c'est-à-dire que $f(a) = g(a) = 0$. On a $(f + g)(a) = 0$ ainsi $f + g \in I_a$.
   ▶ iii) Soit $\lambda \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f \in I_a$, c'est-à-dire que $f(a) = 0$. On a $(\lambda f)(a) = \lambda(a)f(a) = 0$ ainsi $\lambda f \in I_a$.

$$\boxed{I_a \text{ est un idéal de } \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$, par définition $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. Vérifions les trois propriétés requises pour avoir un idéal :
   ▶ i) On a : $0 \in n\mathbb{Z}$ puisque $0 = n \times 0$.
   ▶ ii) Soient $(x, y) \in (n\mathbb{Z})^2$, il existe $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x = nk$ et $y = nk'$. Ainsi $x + y = n(k + k') \in n\mathbb{Z}$ puisque $k + k' \in \mathbb{Z}$.
   ▶ iii) Soient $\lambda \in \mathbb{Z}$ et $x \in n\mathbb{Z}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = nk$. On a : $\lambda x = n(\lambda k) \in n\mathbb{Z}$ puisque $\lambda k \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{n\mathbb{Z} \text{ est un idéal de } \mathbb{Z}}$$

   (b) i. Comme l'idéal $I \neq \{0\}$, il existe un entier non nul appartenant à I, notons-le m.
   • Si $m > 0$, il appartient à $I \cap \mathbb{N}^*$.
   • Si $m < 0$, on a $-1 \times m = -m \in I$ d'après la condition iii) et $-m > 0$.
   Ce raisonnement démontre que $I \cap \mathbb{N}^*$ est non vide et bien sûr $I \cap \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$. Or toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un minimum.

$$\boxed{n = \min(I \cap \mathbb{N}^*) \text{ existe}}$$

   ii. Soit $a \in I$, effectuons la division euclidienne de a par n qui est bien non nul par définition. Il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$$a = qn + r \text{ avec } 0 \leq r < n$$

   On a $n \in I$ donc $(-q) \times n \in I$ d'après la propriété iii). De plus comme $a \in I$, on a $r = a + (-qn) \in I$ d'après la propriété ii).
   Si $r \neq 0$, on a $r \in I \cap \mathbb{N}^*$ et $r < n$, ceci est absurde comme n est le minimum de $I \cap \mathbb{N}^*$. On a nécessairement $r = 0$ et par suite $a = qn \in n\mathbb{Z}$. Ce qui démontre que :

$$\boxed{I \subset n\mathbb{Z}}$$

   iii. Réciproquement, soit $x \in n\mathbb{Z}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = nk$. Comme $n \in I$, la propriété iii) implique que $x = nk \in I$. Par double inclusion, on a démontré que :

$$\boxed{I = n\mathbb{Z}}$$

   (c) C'est un bilan des questions 2.(a) et 2.(b), les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont exactement les parties de $\mathbb{Z}$ de la forme $n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$. La question 2.(a) démontre en effet que $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ et la question 2.(b) démontre la réciproque, à savoir qu'un idéal de $\mathbb{Z}$ s'écrit sous la forme $n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Enfin il faut tenir compte de l'idéal $\{0\}$ qui est obtenu pour $n = 0$.

$$\boxed{I \text{ idéal de } \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ I = n\mathbb{Z}}$$

3. On procède par double implication.

   ($\Rightarrow$) On suppose que I est un idéal de A qui contient un élément inversible que l'on note x. D'après la propriété iii), on a $1 = x^{-1}x \in I$ puisque $x^{-1} \in A$. Soit $\lambda \in A$, on a $\lambda = \lambda \times 1 \in I$ toujours d'après la propriété iii) puisque $1 \in I$. Ce qui démontre que $A \subset I$ et par définition $I \subset A$ d'où $I = A$.

   ($\Leftarrow$) Réciproquement si $I = A$ (qui est bien un idéal de A), on a $1 \in I$ qui est inversible.

$$\boxed{I \text{ contient un élément inversible } \Leftrightarrow I = A}$$

4. (a) On rappelle la caractérisation de l'image réciproque qui va nous servir dans toute cette question, pour tout $x \in A$:

$$x \in f^{-1}(J) \Leftrightarrow f(x) \in J$$

   On a $f^{-1}(J) \subset A$. Vérifions les trois conditions requises pour que $f^{-1}(J)$ soit un idéal de A :

   ▶ i) $0_A \in f^{-1}(J)$ car $f(0_A) = 0_{\widehat{A}} \in J$ car f est un morphisme et J est un idéal de $\widehat{A}$.

   ▶ ii) Soient $(x, y) \in f^{-1}(J)$, on a $f(x + y) = f(x) + f(y) \in J$ puisque $f(x)$ et $f(y)$ sont deux éléments de J qui est un idéal de $\widehat{A}$. Ce qui démontre que $x + y \in f^{-1}(J)$.

   ▶ iii) Enfin, soit $\lambda \in A$ et $x \in f^{-1}(J)$, on a $f(\lambda x) = f(\lambda)f(x)$. Or $f(\lambda) \in \widehat{A}$ et $f(x) \in J$, d'après la propriété iii) cela implique que $f(\lambda x) \in J$ et par suite $\lambda x \in f^{-1}(J)$.

$$\boxed{f^{-1}(J) \text{ est un idéal de } \widehat{A}}$$

   (b) Considérons le morphisme suivant, avec $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ munis de l'addition et la multiplication usuelles :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x \end{array}$$

   Le morphisme f va fournir un contre exemple, prenons $I = \mathbb{Z}$ qui est bien un idéal de $\mathbb{Z}$, par contre $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ n'est pas un idéal de $\mathbb{R}$ puisque la propriété iii) n'est pas vérifiée. En effet $\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$ et $1 \in \mathbb{Z}$ pourtant $\dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{L'image directe d'un idéal par un morphisme d'anneaux n'est pas toujours un idéal}}$$

5. (a) Soit $x \in I$, on a $x = x^1 \in I$ ainsi $x \in \sqrt{I}$ avec $n = 1$.

$$\boxed{I \subset \sqrt{I}}$$

   (b) Par définition, on a : $\sqrt{I} \subset A$. Il reste à vérifier les trois propriétés :

   ▶ i) $0 \in \sqrt{I}$ car $0 = 0^1 \in I$.

   ▶ ii) Soient $(x, y) \in (\sqrt{I})^2$, c'est-à-dire qu'il existe $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $x^m \in I$ et $y^n \in I$. Comme l'anneau A est commutatif, x et y commutent et on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k}}_{(2)}$$

• Etude de (1). On a $0 \leq k \leq m \Leftrightarrow n \leq m+n-k \leq m+n$. Ceci montre que l'on peut mettre y^n en facteur dans la somme (1) :

$$(1) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k} = y^n \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \binom{m+n}{k} x^k y^{m-k}}_{\lambda}$$

L'expression (1) appartient à I d'après la propriété iii) puisque c'est le produit d'un élément λ de A par y^n qui appartient à I.

• Etude de (2). Là aussi, on peut réécrire la somme (2) en mettant x^m en facteur :

$$\sum_{k=m+1}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k} = x^m \sum_{k=m+1}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^{k-m} y^{m+n-k}$$

On conclut que même que précédemment que (2) appartient à I puisque c'est le produit d'un élément de I par un élément de A.
Ainsi $(x+y)^{m+n} = (1) + (2)$ est un élément de I comme somme de deux éléments de I d'après la propriété ii). Ce qui démontre que $x + y \in \sqrt{I}$.
▶ iii) Enfin, soit $\lambda \in A$ et $x \in \sqrt{I}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in I$. En utilisant le fait que A est commutatif, on a :

$$(\lambda x)^n = \lambda^n x^n \in I \text{ d'après la propriété iii) car } x^n \in I$$

$$\boxed{\sqrt{I} \text{ est un idéal de } I}$$

(c) D'après la question (a), si I est un idéal de A alors $I \subset \sqrt{I}$. En appliquant cette propriété à $\sqrt{I}$ qui est bien un idéal d'après la question précédente, on a $\sqrt{I} \subset \sqrt{\sqrt{I}}$. Pour l'autre inclusion, prenons $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$, cela signifie qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in \sqrt{I}$. Ceci implique l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x^n)^p \in I$, c'est-à-dire $x^{np} \in I$. Comme $np \in \mathbb{N}^*$, ceci démontre que $x \in \sqrt{I}$. Par double inclusion, on conclut que :

$$\boxed{\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}}$$

(d) Si $m = 0$ ou $m = 1$, on a bien $\sqrt{m\mathbb{Z}} = m\mathbb{Z}$. On remarque également que d'après la question (a), on a toujours $m\mathbb{Z} \subset \sqrt{m\mathbb{Z}}$.
▶ Supposons que $m \geq 2$ soit divisible par le carré d'un entier, c'est-à-dire qu'il existe un entier $d \geq 2$ tel que $m = d^2 k$ avec $k \in \mathbb{N}$. On a $dk \in \sqrt{m\mathbb{Z}}$ puisque $(dk)^2 = mk \in m\mathbb{Z}$, pourtant $dk \notin m\mathbb{Z}$ puisque m ne divise pas dk. Ceci montre que si m est divisible par le carré d'un entier alors $\sqrt{m\mathbb{Z}} \not\subset m\mathbb{Z}$ et par contraposition si $\sqrt{m\mathbb{Z}} \subset m\mathbb{Z}$ alors m n'est pas divisible par le carré d'un entier.
▶ Réciproquement supposons que $m \geq 2$ ne soit pas divisible par le carré d'un entier. Démontrons que $\sqrt{m\mathbb{Z}} \subset m\mathbb{Z}$, soit $x \in \sqrt{m\mathbb{Z}}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in m\mathbb{Z}$. Ceci implique que m divise x^n. Soit p un nombre premier qui divise m alors $p|x^n$ donc $p|x$ et par suite $m|x$ puisque p apparaît à la puissance 1 dans la décomposition en facteurs premiers de m. Or $m|x \Leftrightarrow x \in m\mathbb{Z}$, ce qui démontre l'inclusion souhaitée.

$$\boxed{\sqrt{m\mathbb{Z}} = m\mathbb{Z} \text{ si et seulement si } m \text{ n'est pas divisible par le carré d'un entier}}$$

6. (a) L'idéal $2\mathbb{Z}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$. En effet, si x et y sont deux entiers relatifs tels que $xy \in 2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que 2 divise xy, ceci implique que 2 divise x ou 2 divise y. Ce qui démontre que $x \in 2\mathbb{Z}$ ou $y \in 2\mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{Plus généralement, si } p \text{ est un nombre premier alors } p\mathbb{Z} \text{ est un idéal premier de } \mathbb{Z}}$$

(b) $I = \{0\}$ est un idéal de A et par hypothèse, il est premier. Ainsi pour $(x, y) \in A^2$, on a :

$$xy \in \{0\} \Rightarrow x \in \{0\} \text{ ou } y \in \{0\}$$

C'est-à-dire $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$. Or l'anneau A est supposé commutatif, non nul et le calcul précédent montre que A est intègre. Soit $x \in A \setminus \{0\}$, démontrons que x est inversible ceci impliquera que A est un corps. On considère l'ensemble $x^2A = \{x^2y,\ y \in A\}$, on montre sans difficulté que x^2A est un idéal de A. Cet idéal est premier d'après l'hypothèse de l'énoncé, on a $x^2 \in x^2A$ donc $x \in x^2A$, c'est-à-dire que $x = x^2y$ où $y \in A$. Or l'anneau A est intègre comme nous l'avons démontré ci-dessus donc $x = x^2y$ et $x \neq 0$ implique que $1 = xy$. Ce qui démontre que x est inversible.

$$\boxed{A \text{ est un corps}}$$