1 ★★★ Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $(v_n) = \left(u_n + \dfrac{1}{2}u_{2n}\right)$ converge vers $l \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que (u_n) admet une valeur d'adhérence.
2. Soit a une valeur d'adhérence de (u_n), démontrer que $2(l-a)$ est une valeur d'adhérence de (u_n).
3. Expliciter la suite définie par $a_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 2(l - a_n)$.
4. En déduire que (u_n) tend vers $\dfrac{2}{3}l$.

(X-ENS)

Corrigé :

1. La suite (u_n) est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge.
2. Soit a une valeur d'adhérence de (u_n), qui existe d'après la question précédente, notons φ l'extractrice associée. On a :

$$\frac{1}{2}u_{2\varphi(n)} = v_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l - a$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2\varphi(n)} = 2(l-a)$. Ce qui démontre que $2(l-a)$ est une valeur d'adhérence de (u_n).

3. La suite (a_n) ainsi définie est arithmético-géométrique. D'après la méthode vue en cours, on trouve immédiatement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{2}{3}l + \left(a - \frac{2}{3}l\right)(-2)^n$$

4. D'après la question 2., tous les éléments de la suite définie dans la question 3. sont des valeurs d'adhérence de (u_n). La suite (u_n) étant bornée, l'ensemble de toutes ces valeurs d'adhérence est borné, or la suite (a_n) n'est pas bornée sauf dans le cas particulier où $a = \dfrac{2}{3}l$. Ceci démontre que la seule valeur d'adhérence possible pour (u_n) est $a = \dfrac{2}{3}l$. Or une suite bornée qui possède une unique valeur d'adhérence est convergente, vous pouvez consulter la démonstration de ce résultat dans l'AR11-6 question 6.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } \frac{2}{3}l}$$

2 ★★★ Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a_n} + e^{b_n} = 2$.

(a) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont bornées.

(b) Démontrer que la seule valeur d'adhérence de (a_n) est 0.

(c) Conclure.

(ENS)

Corrigé :

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$e^{a_n} \leq e^{a_n} + e^{b_n} \text{ et } e^{b_n} \leq e^{a_n} + e^{b_n}$$

Or la suite $(e^{a_n} + e^{b_n})$ est convergente donc majorée, ainsi les suites (e^{a_n}) et (e^{b_n}) sont majorées. On en déduit que les suites (a_n) et (b_n) sont majorées.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = (a_n + b_n) - b_n$. La suite $(a_n + b_n)$ est minorée car convergente et la suite $(-b_n)$ est minorée car (b_n) est majorée, ainsi (a_n) est minorée comme somme de deux suites minorées. De même, on démontre que (b_n) est minorée.

$$\boxed{(a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont bornées}}$$

(b) La suite (a_n) étant bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence $a \in \mathbb{R}$. On note φ l'extractrice associée, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{\varphi(n)} = a$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_{\varphi(n)} = (a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)}) - a_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 - a = -a$$

On obtient donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a_{\varphi(n)}} + e^{b_{\varphi(n)}} = e^a + e^{-a}$ par continuité de la fonction exponentielle. D'autre part, $(e^{a_{\varphi(n)}} + e^{b_{\varphi(n)}})$ tend vers 2 car elle est extraite de $(e^{a_n} + e^{b_n})$ qui tend vers 2. On en déduit que $e^a + e^{-a} = 2$, c'est-à-dire $\mathrm{ch}(a) = 1$, on sait que c'est équivalent à $a = 0$. On vient de démontrer que la seule valeur d'adhérence de (a_n) est 0.

(c) Pour conclure, on utilise le fait qu'une suite bornée qui possède une unique valeur d'adhérence est convergente, vous pouvez consulter la démonstration de ce résultat dans l'AR10-7 question 6.

$$\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ tend vers } 0}$$

3 ★ Étudier la convergence de la suite $u_n = \left(5\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{5}\cos(n)\right)^n$ définie pour $n \geq 1$.

Corrigé : La suite $\left(\frac{1}{5}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ tend vers 0, ainsi il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \left|\frac{1}{5}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \leq \frac{1}{5}$$

Ainsi pour $n \geq n_0$, on a :

$$\left|\frac{1}{5}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{5}\cos(n)\right| \leq \left|\frac{1}{5}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| + \left|\frac{1}{5}\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

On en déduit que pour $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ tend vers } 0}$$

4 ★★ Soit (u_n) une suite réelle telle qu'il existe une suite réelle (α_p) qui tend vers 0 et vérifiant :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ |u_n| \leq \alpha_p + \frac{p}{n+1}$$

Démontrer que (u_n) tend vers 0.

Corrigé : On va revenir à la définition, soit $\underline{\varepsilon > 0}$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|\alpha_{p_0}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. La suite de terme général $\frac{p_0}{n+1}$ tend vers 0 ainsi on peut fixer un entier $\underline{n_0 \in \mathbb{N}}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \left|\frac{p_0}{n+1}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour $\underline{n \geq n_0}$, nous avons donc :

$$\underline{|u_n| \leq} |\alpha_{p_0}| + \left|\frac{p_0}{n+1}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\varepsilon}$$

Les termes soulignés constitue la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ tend vers } 0}$$

5 ★ La suite (a_n) est définie par $a_{n+1} = \sqrt{4 + 3a_n}$ pour $n \geq 0$ et $a_0 = 0$. Démontrer que (a_n) converge et calculer sa limite.

Corrigé : • Par une récurrence immédiate, on vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$. Ce qui permet de justifier que (a_n) est bien définie.

• Pour commencer, on peut démontrer par récurrence que la suite (a_n) est majorée par 4.

$$\mathcal{H}_n \ : \ a_n \leq 4$$

Initialisation. On a : $a_0 = 0 \leq 4$.

Hérédité. On suppose que $a_n \leq 4$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a :

$$a_{n+1} = \sqrt{4+3a_n} \leq \sqrt{4+3\times 4} \leq \sqrt{16} = 4$$

Ce qui démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq 4$.

• On peut ensuite étudier la monotonie de (a_n). On a :

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{4+3a_n} - a_n = \frac{(\sqrt{4+3a_n} - a_n)(\sqrt{4+3a_n}+a_n)}{\sqrt{4+3a_n}+a_n} = \frac{-a_n^2+3a_n+4}{\sqrt{4+3a_n}+a_n} = \frac{(4-a_n)(a_n+1)}{\sqrt{4+3a_n}+a_n} \geq 0$$

car nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in [0,4]$. La suite (a_n) est croissante.

• La suite (a_n) est croissante et majorée, elle converge vers $l \in [0,4]$. On passe à la limite dans la relation $a_{n+1} = \sqrt{4+3a_n}$, pour obtenir $l = \sqrt{4+3l}$, ce qui donne $l^2 = 4+3l$. On résout cette équation pour en déduire que $l = 4$ ou $l = -1$.

$$\boxed{(a_n) \text{ converge vers } 4}$$

---

6 ★★★ Soit (z_n) une suite à valeurs complexes. On suppose que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \neq q \Rightarrow |z_p - z_q| \geq 1$$

Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$.

Corrigé : On raisonne par l'absurde en supposant que $(|z_n|)$ ne tend pas vers $+\infty$. Ce signifie que :

$$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |z_n| \leq A$$

Cela signifie qu'il existe une infinité de termes de la suite qui sont bornés en module par A, on peut les placer dans une suite extraite. C'est-à-dire qu'il existe une extractrice φ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |z_{\varphi(n)}| \leq A$$

La suite $(z_{\varphi(n)})$ est bornée donc elle admet une suite extraite convergente, il existe une extractrice ψ telle que $(z_{\varphi(\psi(n))})$ converge vers l. Il reste à appliquer l'hypothèse pour obtenir une contradiction. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(\psi(n)) \neq \varphi(\psi(n+1))$ par stricte croissance des extractrices, ainsi :

$$|z_{\varphi(\psi(n))} - z_{\varphi(\psi(n+1))}| \geq 1$$

En passant à la limite, on obtient $|l - l| \geq 1$ ce qui est absurde.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty}$$

---

7 ★ Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq 3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 6 \end{cases}$$

Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ?

Corrigé : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n \frac{v_n}{3} \leq u_n \leq 2 \text{ et } \frac{u_n}{2} v_n \leq v_n \leq 3$$

On utilise le théorème d'encadrement pour obtenir :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 2 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} v_n = 3}$$

8 ★ Soit $a \in]0,1[$. On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a^k)$$

1. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
2. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leq e^x$.
3. En déduire que la suite (u_n) converge.

Corrigé :

1. La suite (u_n) est à termes strictement positifs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} (1 + a^k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + a^k)} = (1 + a^{n+1}) > 0$$

   La suite (u_n) est strictement croissante.
2. Cette inégalité se démontre sans problème avec une étude de fonction.
3. Pour démontrer que cette suite croissante converge, il reste à démontrer qu'elle est majorée. Pour cela, on utilise l'inégalité de la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a^k) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{a^k} = e^{\sum_{k=1}^{n} a^k} = e^{a \frac{1-a^n}{1-a}} \leq e^{\frac{a}{1-a}}$$

   car $a^n \in]0,1[$ donc $1 - a^n \in]0,1[$. La suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge}}$$

9 Expliciter le terme général de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 7 \end{cases}$$

Corrigé : On reconnait une suite arithmético-géométrique. On a :

$$l = 2l + 7 \Leftrightarrow l = -7$$

On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -7 + \lambda 2^n$. On a $u_0 = 3$ qui équivaut à $-7 + \lambda = 3$ donc $\lambda = 10$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -7 + 10 \times 2^n}$$

10 Expliciter le terme général de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6 \end{cases}$$

Corrigé : L'équation caractéristique est $X^2 - X - 6 = 0$ qui a pour solutions -2 et 3. D'après le cours, on sait que :

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A \times (-2)^n + B \times 3^n$$

On trouve A et B avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + 3B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ 2B + 3B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n - (-2)^n}$$

11 Expliciter le terme général de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - \dfrac{9}{4}u_n \end{cases}$$

Corrigé : L'équation caractéristique est $X^2 - 3X + \frac{9}{4} = 0$ qui a une solution double $\frac{3}{2}$. D'après le cours, on sait que :

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (A + Bn)\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

On trouve A et B avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ (A+B) \times \dfrac{3}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(-\frac{1}{3}n + 1\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

12 Expliciter le terme général de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \text{ et } u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

Corrigé : L'équation caractéristique est $X^2 - 2X + 2 = 0$ qui a deux solutions complexes conjuguées $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. D'après le cours, on sait que :

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{\frac{n}{2}}\left(A\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + B\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

On trouve A et B avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ \sqrt{2}\left(A\dfrac{1}{\sqrt{2}} + B\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{\frac{n}{2}}\left(2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 3\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)}$$

13 Soit (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^3}$$

Étudier la convergence de (u_n).

Corrigé : On procède par encadrement :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \frac{1}{n^2+n^3} \leq \frac{1}{n^2+k^3} \leq \frac{1}{n^2+1^3}$$

On somme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n^3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1}$$

Les sommes qui encadrent (u_n) se calculent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n}{n^2+n^3} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+1}$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

14 ★ Soit (u_n) une suite réelle telle que : $\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ 0 \leq u_{m+n} \leq \dfrac{m+n}{mn}$. Démontrer que (u_n) converge.

Corrigé : Prenons $n = m$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_{2n} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

D'après le théorème d'encadrement (u_{2n}) tend vers 0.

De même, en prenant $m = n + 1$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{(n+1)n}$$

D'après le théorème d'encadrement (u_{2n+1}) tend vers 0.

D'après le théorème de recollement, on en déduit que :

$$\boxed{(u_n) \text{ tend vers } 0}$$

15 ★★ Soit $\theta \in]0, \pi[$, étudier la limite de la suite :

$$a_n = \left(n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\theta}{k}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Corrigé : Soit $\theta \in]0,\pi[$, pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a $\dfrac{\theta}{k} \in]0,\pi[$ ainsi $\sin\left(\dfrac{\theta}{k}\right) > 0$ et la suite (a_n) est strictement positive Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln(a_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{\theta}{k}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(k\sin\left(\frac{\theta}{k}\right)\right)$$

Cela fait penser au théorème de Cesàro, on pose donc $u_n = \ln\left(n\sin\left(\dfrac{\theta}{n}\right)\right)$ pour $n \geq 1$. On a :

$$n\sin\left(\frac{\theta}{n}\right) = \theta\frac{\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)}{\frac{\theta}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta$$

La suite (u_n) tend vers $\ln(\theta)$ par continuité de la fonction ln. D'après le théorème de Cesàro, la suite $(\ln(a_n))$ tend vers $\ln(\theta)$.

$$\boxed{(a_n) \text{ tend vers } \theta}$$

$\boxed{16}$ ★ Soit (a_n) une suite décroissante qui tend vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Démontrer que (u_n) converge.

Corrigé : La stratégie va être de démontrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

- La suite (u_{2n}) est décroissante car :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} - u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$$

- La suite (u_{2n+1}) est croissante car :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+3} - u_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0$$

- Enfin :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} - u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k = -a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'après le théorème des suites adjacentes, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. D'après le théorème de recollement (u_n) converge.

$$\boxed{(u_n) \text{ converge}}$$

$\boxed{17}$ ★★ Pour $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}$$

Corrigé : On constate que pour $n \geq 1$:

$$u_{2n} = 1$$

Ainsi la suite extraite (u_{2n}) converge vers 1. Par contre :

$$u_{2n+1} = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n^n} = \sqrt{n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \geq \sqrt{n+\frac{1}{2}}$$

Nous voyons ainsi que (u_{2n+1}) tend vers $+\infty$ et la suite initiale ne converge pas.

18 ★ Donner un exemple de suite (u_n) divergente telle que pour tout entier $k \geq 2$, (u_{kn}) converge.

Corrigé : On prend la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ n'est pas premier} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si l'on note φ l'extractrice composée de tous les nombres premiers pris dans l'ordre, on a $(u_{\varphi(n)})$ constante égale à 1 donc converge. Cependant si l'on fixe un entier $k \geq 2$, on a kn qui est un nombre non premier dès que $n \geq 2$ ainsi (u_{kn}) converge vers 0. La suite (u_n) convient.

19 ★ Soit (u_n) une suite d'éléments de $]0,1[$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1-u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4}$$

Montrer que (u_n) tend vers $\frac{1}{2}$.

Corrigé : • Déjà, la suite (u_n) est majorée par 1.

• Nous pouvons démontrer ensuite qu'elle est croissante car pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n(1-u_n) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - u_n\right)^2 \leq \frac{1}{4} < u_{n+1}(1-u_n)$$

En simplifiant par $1 - u_n$ qui est non nul, il vient : $u_n < u_{n+1}$.

• La suite (u_n) est croissante et majorée, elle converge vers $l \in \mathbb{R}$. En passant à la limite dans l'inégalité de départ, il vient :

$$(1-l)l \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 \geq \left(l - \frac{1}{2}\right)^2$$

On en déduit que $l = \frac{1}{2}$.

20 ★ Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$. Montrer que (I_n) converge et calculer sa limite.

Corrigé : On peut procéder directement par encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ 0 \leq x^n\sqrt{1-x} \leq x^n$$

Puis on intègre les encadrements :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème d'encadrement (I_n) tend vers 0.

21 ★ Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positives. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Montrer que si (v_n) tend vers 0 alors (u_n) tend vers 0.

Corrigé : On effectue le produit de ces inégalités car les réels mis en jeu sont bien positifs :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \prod_{k=0}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k}$$

Ce qui donne en reconnaissant des produits télescopiques :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_n}{u_0} \leq \frac{v_n}{v_0}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n \leq \frac{v_n}{v_0} u_0$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que (u_n) tend vers 0.

$\boxed{22}$ ★ Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $[0,1]$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) tendent vers 1.

Corrigé : On utilise simplement le théorème d'encadrement en remarquant que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n v_n \leq u_n \leq 1$$

On en déduit que (u_n) tend vers 1 et de même (v_n) tend vers 1.

$\boxed{23}$ ★★ Étudier la limite de la suite définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{5}\Big(3u_n - 2\overline{u_n}\Big)$.

Corrigé : On considère les parties réelles et imaginaires en écrivant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n + iy_n$ où $x_n \in \mathbb{R}$ et $y_n \in \mathbb{R}$.

En utilisant la relation de l'énoncé, on a immédiatement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - \frac{x_n}{5}$ et $y_{n+1} = y_n$. On en déduit que la suite (x_n) tend vers 0 tandis que la suite (y_n) est constante égale à y_0.

Finalement, la suite (u_n) converge vers iy_0.

$\boxed{24}$ ★★★ Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$$

1. (a) Démontrer que :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$$
   (b) Démontrer que :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ x < y \Rightarrow x < \sqrt{xy} < y$$
2. Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Démontrer que la limite commune de (u_n) et (v_n) est $\frac{b\sin(\alpha)}{\alpha}$ où $\alpha = \operatorname{Arccos}\Big(\frac{a}{b}\Big)$.

Corrigé :

1. (a) Soient$(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $x < y$, on a :
$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} < \frac{x}{2} + \frac{y}{2} < \frac{y}{2} + \frac{y}{2} = y$$
   Ce qui est bien l'inégalité souhaitée.

(b) Soient$(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $x < y$, on a :

$$x = \sqrt{x \times x} < \sqrt{xy} < \sqrt{y \times y} = y$$

Ce qui est bien l'inégalité souhaitée.

2. Tout d'abord, on peut démontrer par une récurrence immédiate que tous les termes des suites (u_n) et (v_n) sont strictement positifs. Ce qui permet d'affirmer que (u_n) et surtout (v_n) sont bien définies.

D'après la question 1.(a), on a :

$$u_0 < \frac{u_0 + v_0}{2} < v_0$$

c'est-à-dire : $u_0 < u_1 < v_0$ et d'après la question 1.(b), on a :

$$u_1 < \underbrace{\sqrt{u_1 v_0}}_{v_1} < v_0$$

ce qui démontre que : $u_0 < u_1 < v_1 < v_0$.
Ceci nous laisse penser que l'on va pouvoir démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n \ : \ u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$$

- Nous venons de faire l'initialisation.
- On suppose que $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. D'après la question 1.(a), on a :

$$u_{n+1} < \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} < v_{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1} < u_{n+2} < v_{n+1}$$

et avec la question 1.(b) :

$$u_{n+2} < \sqrt{u_{n+2} v_{n+1}} < v_{n+1} \Leftrightarrow u_{n+2} < v_{n+2} < v_{n+1}$$

On a bien démontré que :

$$u_{n+1} < u_{n+2} < v_{n+2} < v_{n+1}$$

ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence.

L'hypothèse de récurrence, nous apprend que (u_n) est strictement croissante et (v_n) est strictement décroissante. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_0 \leq u_n < v_n \leq v_0$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 donc elle converge vers $l \in \mathbb{R}$. La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge vers $l' \in \mathbb{R}$. Il reste à démontrer que $l = l'$ ainsi les suites (u_n) et (v_n) seront adjacentes. Pour cela, on passe à la limite dans la relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour obtenir $l = \dfrac{l + l'}{2}$, ce qui donne bien $l = l'$.

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$$

3. On suit l'indication de l'énoncé en posant $\alpha = \text{Arccos}\left(\dfrac{a}{b}\right)$, ce qui a un sens car $\dfrac{a}{b} \in]0, 1[$ puisque $0 < a < b$. On a ainsi $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Cette relation est équivalente à $\cos(\alpha) = \dfrac{a}{b}$ ou encore $a = b\cos(\alpha)$. Explicitons les premiers termes des suites en fonction de ce paramètre α afin d'avoir une idée de la formule à démontrer :

$$u_0 = a = b\cos(\alpha), \ v_0 = b$$

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{b\cos(\alpha) + b}{2} = b\frac{\cos(\alpha) + 1}{2} = b\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$v_1 = \sqrt{u_1 v_0} = \sqrt{b\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)b} = b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Cela nous met sur la voie pour démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\mathcal{H}_n \ : \ v_n = b\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) \text{ et } u_n = v_n \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

- L'initialisation a été faite.

- On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} = \left(b\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\right)\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)+1}{2} = \left(b\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \left(b\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$$

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} = \sqrt{\left(b\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\times b\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)} = b\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$$

Ce qui démontre les formules annoncées au rang $n+1$ et termine la récurrence.

Au cours de ce calcul, on a simplifié les racines carrées et les carrés sans mettre de valeur absolue car tous les cosinus mis en jeu sont positifs puisque $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On remarque également que les sinus que l'on va utiliser juste après sont également strictement positifs pour la même raison.

À présent, il reste à simplifier l'expression de (v_n) afin d'en trouver plus facilement la limite, c'est-à-dire que l'on doit simplifier le produit $b\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$. En multipliant par $\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$ et en utilisant la formule $\cos(a)\sin(a) = \frac{1}{2}\sin(2a)$, on constate qu'il y a des simplifications en cascade. Plus précisément, démontrons par récurrence que :

$$\mathcal{H}_n \ : \ v_n = b\frac{\sin(\alpha)}{2^n\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$$

- Pour $n = 0$, la formule est vérifiée car $v_0 = b$.
- On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= b\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\\
&= \left(b\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\right)\times\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\\
&= b\frac{\sin(\alpha)}{2^n\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}\times\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\\
&= b\frac{\sin(\alpha)}{2^n}\times\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}\\
&= b\frac{\sin(\alpha)}{2^n}\times\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}\\
&= b\frac{\sin(\alpha)}{2^n}\times\frac{1}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}\\
&= b\frac{\sin(\alpha)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}
\end{aligned}$$

Ce qui démontre la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

Pour terminer l'exercice, nous allons utiliser la nouvelle expression de (v_n) afin de déterminer la limite. Examinons le dénominateur, on a :

$$2^n\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \alpha\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{\frac{\alpha}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

en utilisant la limite classique $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.

En reportant dans l'expression de (v_n), il vient $\lim_{n\to+\infty} v_n = b\dfrac{\sin(\alpha)}{\alpha}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = b\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}}$$