DS1 ITC

Vos fonctions doivent être commentées et documentées. Vos réponses doivent être justifiées. Vous avez 1h45.

Problème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse aux fonctions $f : [\![0, n-1]\!] \to [\![0, n-1]\!]$ que l'on représente en Python à l'aide d'une liste L, de longueur n. C'est-à-dire que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $L[i] = f(i)$.

Par exemple, la fonction $f : i \mapsto 2i + 1\ [10]$ définie de $[\![0, 9]\!]$ dans $[\![0, 9]\!]$ est représentée par la liste $L = [1, 3, 5, 7, 9, 1, 3, 5, 7, 9]$.

1. Écrire une fonction $definie(L)$ qui prend en paramètre une liste L et renvoie $True$ si les éléments de la liste sont dans l'intervalle $[\![0, n-1]\!]$ où n est la longueur de la liste et $False$ sinon. Cette fonction permet ainsi de vérifier que la fonction f associée à la liste L est correctement définie en testant si les images sont dans $[\![0, n-1]\!]$. On ne vérifiera pas que les éléments de la liste sont des entiers.

   Dans toute la suite, on considère que l'utilisateur se servira des fonctions avec comme paramètre une liste L bien définie, ainsi il ne sera pas nécessaire de tester cela au début de chaque fonction que vous allez écrire.

2. Écrire une fonction $iden(n)$ qui renvoie la liste de longueur n associée à la fonction identité de $[\![0, n-1]\!]$ dans $[\![0, n-1]\!]$.
3. Écrire une fonction $f(a, b, n)$ qui renvoie la liste de longueur n associée à la fonction $f : i \mapsto ai + b\ [n]$.
4. (a) Écrire une fonction $comp(L)$ qui prend en paramètre une liste L associée à une fonction f et renvoie la liste associée à $f \circ f$.

   (b) Écrire une fonction $comp2(L,\ M)$ qui prend en paramètres une liste L associée à une fonction f et une liste M associée à une fonction g et renvoie la liste associée à $f \circ g$.

   On définit les composées successives de la fonction $f : [\![0, n-1]\!] \to [\![0, n-1]\!]$ *par* $f^0 = id_{[\![0,n-1]\!]}$ *et pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$, $f^{p+1} = f^p \circ f$.

   (c) Écrire une fonction $compsucc(L, p)$ qui prend en paramètres une liste L et un entier naturel p et renvoie la liste associée à f^p.
5. (a) Écrire une fonction $ante(L, i)$ qui prend en paramètre une liste L associée à une fonction f et renvoie la liste des antécédents de i par f.

   (b) Écrire une fonction $surj(L)$ qui renvoie $True$ si la fonction f associée à L est surjective et $False$ sinon.

   (c) Écrire une fonction $recip(L)$ qui prend en paramètre une liste L associée à une fonction bijective et renvoie la liste associée à f^{-1}.

   (d) Que fait la fonction suivante ? Quelle est sa complexité si l'on compte le nombre de comparaisons entre deux éléments de la liste L ?

```python
def test(L):
    n = len(L)
    for i in range(n):
        for j in range(i + 1, n):
            if L[i] == L[j]:
                return(False)
    return(True)
```

Questions diverses

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Écrire les lignes de commandes qui permettent de tracer la fonction $x \mapsto \sqrt{\sin(x^2 - x + 1) + 4}$ sur l'intervalle $[-7, 3]$.
2. On considère la fonction suivante :

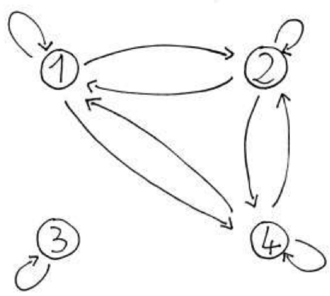
```python
def f(n):
    """n est un entier naturel"""
    p = 1
    i = 0
    while i < n:
        p = p * 2
        i = i + 1
    return(p)
```

   (a) Que calcule cette fonction ?

   (b) Justifier qu'elle se termine en donnant un variant de boucle.

   (c) Justifier qu'elle renvoie le résultat voulu en donnant un invariant de boucle.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = [\![1, n]\!]$. On choisit de représenter une relation binaire sur E en Python à l'aide d'un dictionnaire. Par exemple, la relation binaire sur $[\![1, 4]\!]$ illustrée par le graphe suivant :



sera représentée en Python par le dictionnaire suivant :

```python
d = {1 : [1, 2, 4], 2 : [2, 1, 4], 3 : [3], 4 : [4, 1, 2]}
```

Écrire une fonction qui prend en paramètre un dictionnaire d de ce type et renvoie $True$ si la relation binaire associée est une relation d'équivalence et $False$ sinon.

4. Voici les premiers termes de la suite de Conway :

$$1, 11, 21, 1211, 111221, 312211$$

À vous de comprendre la logique de cette suite, puis d'écrire un programme permettant d'afficher les 20 premiers termes de la suite.

5. Que renvoie $f(50)$ où f est la fonction suivante ?

```python
def f(n): # n est un entier naturel
    if n > 100:
        return(n - 10)
    return(f(f(n + 11)))
```