A-Calculs de base

1. Soient x et y deux réels vérifiant $2 \leq x \leq 4$ et $-5 \leq y < -3$. Donner un encadrement de $x+y$, $x-y$, xy et $\dfrac{x}{y}$.

Corrigé : • Pour $x+y$, on somme les inégalités :

$$\underline{-3 \leq x+y < 1}$$

• On multiplie la seconde inégalité par -1 : $5 \geq -y > 3$, c'est-à-dire : $3 < -y \leq 5$. On somme les inégalités pour avoir :

$$\underline{5 < x-y \leq 9}$$

• On a $2 \leq x \leq 4$ et $3 < -y \leq 5$, c'est deux inégalités étant positives, nous pouvons les multiplier entre elles pour obtenir :

$$6 < -xy \leq 20 \Leftrightarrow \underline{-20 \leq xy < -6}$$

• On part de l'inégalité sur y, les nombres mis en jeu étant de même signe, on peut prendre l'inverse : $-\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{y} \leq -\dfrac{1}{5}$. On multiplie par -1 : $\dfrac{1}{5} \leq -\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{3}$. On multiplie cette dernière inégalité avec celle portant sur x pour obtenir :

$$\frac{2}{5} \leq -\frac{x}{y} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \underline{-\frac{4}{3} < \frac{x}{y} \leq -\frac{2}{5}}$$

2. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$.

Corrigé : La fonction est clairement définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$. Remarquons que les deux trinômes x^2+x+1 et x^2-x+1 sont strictement positifs sur $\mathbb{R}$ puisque leur discriminant est négatif. Ainsi le quotient $\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$ est du signe de $\dfrac{x-1}{x+1}$. On trouve ce signe sans difficulté avec un tableau de signe :

$$\boxed{\frac{x^3-1}{x^3+1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup[1, +\infty[}$$

3. ★ Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour que l'équation suivante ait deux solutions réelles positives :

$$m^2x^2 + (m-3)x + 4 = 0$$

Corrigé : • Si $m = 0$, l'équation devient $-3x+4 = 0$, c'est-à-dire $x = \dfrac{4}{3}$. Dans ce cas, il n'y a qu'une solution et cette valeur de m est donc à exclure.

• Si $m \neq 0$ alors nous avons à faire à une équation de degré 2. Le discriminant vaut :

$$\Delta = (m-3)^2 - 16m^2 = (m-3-4m)(m-3+4m) = -3(m+1)(5m-3)$$

L'équation admet deux solutions réelles si et seulement si $\Delta > 0$, c'est-à-dire : $(m+1)(5m-3) < 0$. Un trinôme du second degré étant du signe de $-a$ entre les racines, on a $\Delta > 0$ si et seulement si $m \in \left]-1, \frac{3}{5}\right[\setminus \{0\}$.

• D'autre part, les solutions doivent être positives. Ces deux solutions sont positives si et seulement si leur produit est positif donc $\frac{4}{m^2} \geq 0$ et leur somme est positive donc $-\frac{m-3}{m^2} \geq 0$. La première condition est toujours vérifiée et la seconde condition est équivalente à $m \leq 3$.
On fait la conjonction de ces deux conditions pour obtenir :

$$\boxed{m \in \left]-1, \frac{3}{5}\right[\setminus \{0\}}$$

B-Sommes et produits

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+2}$.

Corrigé : On fait apparaitre deux produits télescopiques :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+2} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \times \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{n+1} \times \frac{2}{n+2} = \underline{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+3} (2k+1)$.

Corrigé : On reconnait la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2, le premier terme est 9 et le dernier vaut $2n+7$. Le nombre de termes est n, d'où :

$$\sum_{k=4}^{n+3} (2k+1) = \frac{(9+2n+7) \times n}{2} = \underline{(n+8)n}$$

6. Calculer $S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé : En intervertissant l'ordre de sommation, il vient :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \frac{i(i+1)}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

En simplifiant, on trouve :

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+3)}{4}}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1}$.

Corrigé : On fait apparaitre la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} 9^k = \frac{1}{3} \times 9 \times \frac{9^n - 1}{9 - 1} = \underline{\frac{3}{8}(9^n - 1)}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^{n-k}$.

Corrigé : On applique la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 5^{n-k} = (1+5)^n = \underline{6^n}$$

9. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

Corrigé : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on cherche à décomposer la fraction comme une somme de deux fractions plus simples. C'est-à-dire que l'on cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\alpha}{2k-1} + \frac{\beta}{2k+1}$$

En réduisant au même dénominateur et en identifiant les numérateurs, on obtient :

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big)$$

On en déduit que :

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2n+1}\Big)$$

ceci en reconnaissant une somme télescopique.

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}}$$

C-Limites

10. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x+3} + x + 2$.

Corrigé : Ce n'est pas une forme indéterminée :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x+3} + x + 2 = \underline{+\infty}$$

11. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4x+3} + x + 2$.

Corrigé : Ici, c'est bien une forme indéterminée, on multiplie par la quantité conjuguée, c'est égal à

$$\sqrt{x^2+4x+3} + x + 2\frac{(\sqrt{x^2+4x+3} + x + 2)(\sqrt{x^2+4x+3} - (x+2))}{\sqrt{x^2+4x+3} - (x+2)} = \frac{(x^2+4x+3) - (x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+3} - (x+2)}$$

Le numérateur se simplifie, il reste : $\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+4x+3} - (x+2)}$. Quand x tend vers $-\infty$, ce n'est plus indéterminé et :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4x+3} + x + 2 = 0}$$

12. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2}$

Corrigé : La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fraction rationnelle est la limite des termes de plus haut de degré :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{5x^3} = \underline{\frac{1}{5}}$$

13. ★ Déterminer $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$.

Corrigé : Le trinôme au dénominateur se factorise une fois que l'on a trouvé ses racines. Pour tout $x > 0$, on a :

$$x^2-5x+4 = (x-1)(x-4) = (x-1)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to4} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{12}$$

$$\boxed{\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \frac{1}{12}}$$

D-Équations et inéquations

14. Trouver tous les x réels tels que : $|x+5| \leq 100$.

Corrigé : On a :

$$|x+5| \leq 100 \Leftrightarrow -100 \leq x+5 \leq 100 \Leftrightarrow \underline{-105 \leq x \leq 95}$$

15. Trouver tous les réels x tels que $x-1 < \sqrt{x}$.

Corrigé : L'inéquation est définie pour $x \geq 0$. Déjà si $x \in [0,1[$, l'inéquation est clairement vérifiée puisque le membre de gauche est strictement négatif et le membre de droite positif. Pour $x \geq 1$, on peut élever les deux membres au carré puisqu'ils sont positifs et obtenir :

$$(x-1)^2 < x \Leftrightarrow x^2-3x+1 < 0$$

Les racines de ce trinôme de degré 2 sont $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Il est clair que $x_2 < 1$, ainsi dans le cas où $x \geq 1$, l'intervalle $[1, x_1[$ est solution.
En tenant compte des deux cas, nous obtenons :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[0, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[}$$

16. Résoudre l'équation $\ln(x) + \ln(x-1) \geq \ln(6)$.

Corrigé : Le domaine de définition de l'équation est $]1, +\infty[$. Sur ce domaine l'équation est équivalente à :

$$\ln(x(x-1)) \geq \ln(6)$$

Par stricte croissance de la fonction ln, c'est équivalent à $x(x-1) \geq 6$, c'est-à-dire $x^2 - x - 6 \geq 0$.
Les racines de ce trinôme du second degré sont -2 et 3, le trinôme est donc positif sur $]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$.
En prenant l'intersection avec le domaine de définition, nous obtenons l'ensemble des solutions :

$$\boxed{\mathcal{S} = [3, +\infty[}$$

17. ★ Soit $m \in \mathbb{R}$. En discutant selon la valeur de m, trouver tous les réels x tels que : $\sqrt{2x+m} \geq x+1$.

Corrigé : L'inéquation a un sens si $2x + m \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -\dfrac{m}{2}$, condition que l'on considère vérifiée dans la suite des calculs. Il y a deux cas à distinguer :

• Remarquons que si $\underline{x < -1}$ alors l'inéquation est automatiquement satisfaite.

► Si $m > 2$ alors $-m < -2$ et $-\dfrac{m}{2} < -1$ donc les conditions $x \geq -\dfrac{m}{2}$ et $x < -1$ impliquent que les réels de l'intervalle $\left[-\dfrac{m}{2}, -1\right[$ sont solutions.

► Si $m \leq 2$ alors $-m \geq -2$ et $-\dfrac{m}{2} \geq -1$ donc les conditions $x \geq -\dfrac{m}{2}$ et $x < -1$ sont incompatibles.

• On suppose que $\underline{x \geq -1}$ alors $x + 1 \geq 0$ et les deux membres de l'inégalité étant positifs, on peut élever au carré :

$$\sqrt{2x+m} \geq x+1 \Leftrightarrow 2x+m \geq x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2 \leq m-1$$

Cette dernière équation, nous impose de distinguer différents cas.

(1) ► Si $m < 1$ alors il n'y a pas de solution.

(2) ► Si $m = 1$, $x = 0$ est l'unique solution.

► Si $m > 1$, l'équation $x^2 \leq m-1$ est équivalente à $x \in [-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}]$ mais il faut se souvenir que $x \geq -1$. Il s'agit alors de placer -1 par rapport à l'intervalle $[-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}]$, ceci nous impose de distinguer à nouveau différents sous-cas :

(3) → Si $m > 2$, -1 se situe dans l'intervalle $[-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}]$. Dans ce cas l'intervalle solution est $[-1, \sqrt{m-1}]$.
(4) → Si $m = 2$, on a : $-\sqrt{m-1} = -1$ et $\sqrt{m-1} = 1$. Dans ce cas l'intervalle solution est $[-1, 1]$.
(5) → Si $1 < m < 2$. L'intervalle solution est $[-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}]$ puisque -1 est à gauche des racines.

Pour finir cette étude, il s'agit de vérifier ce que donne la condition initiale $x \geq -\dfrac{m}{2}$ dans chaque cas (1), (2), (3), (4) et (5) :
(1) En ajoutant une condition, il n'y a toujours pas de solution.

(2) Si $m = 1$, la condition devient $x \geq -\dfrac{1}{2}$ ce qui est compatible avec $x = 0$.

(3) et (4) Si $m \geq 2$, on a : $-\dfrac{m}{2} \leq -1$. Ainsi la condition $x \geq -\dfrac{m}{2}$ ne change pas l'intervalle solution : $[-1, \sqrt{m-1}]$.

(5) si $1 < m < 2$, il s'agit de comparer $-\sqrt{m-1}$ et $-\dfrac{m}{2}$:

$$(m-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} \geq m - 1 \Leftrightarrow \frac{m}{2} \geq \sqrt{m-1} \Leftrightarrow -\frac{m}{2} \leq -\sqrt{m-1}$$

Ainsi la condition $x \geq -\dfrac{m}{2}$ ne change pas notre intervalle solution : $[-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}]$.
Finalement, en faisant le bilan, on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} \text{Si } m \geq 2, & \mathcal{S} = \left[-\dfrac{m}{2}, \sqrt{m-1}\right] \\ \text{Si } 1 \leq m < 2, & \mathcal{S} = \left[-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}\right] \\ \text{Si } m < 1, & \mathcal{S} = \emptyset \end{cases}}$$

E-Dérivation

18. Donner l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$.

Corrigé : On a : $f : x \mapsto x^{-\frac{3}{4}}$. Cette fonction puissance est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\boxed{f' : x \mapsto -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}}$$

19. Donner l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+2x}{1-x}\right)$. On simplifiera au maximum l'écriture de la dérivée.

Corrigé : On considère la fonction $u : x \mapsto \dfrac{1+2x}{1-x}$. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Afin de pouvoir composer par la fonction ln qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, il s'agit de déterminer les réels x tels que $u(x) > 0$.
On a :

$$1 + 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

Ainsi : $u(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

Par composition l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f est $\left]-\dfrac{1}{2}, 1\right[$. Pour calculer la dérivée, on procède par étape :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, 1\right[,\ u'(x) = \frac{2(1-x) - (1+2x) \times -1}{(1-x)^2}$$

La dérivée de $\ln(u)$ est $\dfrac{u'}{u}$ donc :

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{2}, 1 \right[,\ f'(x) = \frac{\frac{2(1-x)-(1+2x)\times -1}{(1-x)^2}}{\frac{1+2x}{1-x}}$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $(1-x)^2$ cela donne :

$$\boxed{\forall x \in \left] -\frac{1}{2}, 1 \right[,\ f'(x) = \frac{3}{(1+2x)(1-x)}}$$