# Échauffement

1. On applique la formule du cours permettant de factoriser $a^n - b^n$ avec $b = 2$ et $n = 5$ :

$$\boxed{a^5 - 2^5 = (a-2)(a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 8a + 16)}$$

2. On utilise les sommes classiques vues en cours et la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+3k^2) = 2\sum_{k=1}^{n} k + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\frac{n(n+1)}{2} + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

En simplifiant, on trouve :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(2k+3k^2) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+3)}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P_n = 3^n \prod_{k=2}^{n+1} e^{2^k} = 3^n \times \exp\left(\sum_{k=2}^{n+1} 2^k\right) = 3^n e^{2^2 \times \frac{2^n-1}{2-1}} = 3^n e^{2^{n+2}-4}$$

$$\boxed{P_n = 3^n e^{2^{n+2}-4}}$$

4. En intervertissant l'ordre de sommation, il vient :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{i} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\frac{i(i+1)}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

En simplifiant, on trouve :

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+3)}{4}}$$

5. On utilise la formule de Pascal :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}$$

On ajoute un terme à la somme pour que la borne supérieure soit $n+1$ afin de faire apparaitre la formule du binôme de Newton :

$$S_n = \left( \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \right) - \binom{n+1}{n+1} = 2^{n+1} - 1$$

$$\boxed{S_n = 2^{n+1} - 1}$$

6. (a) D'après le cours, la négation de "$Q$ et $R$" est "$Q$ et non$(R)$". Ainsi, la négation de $(P)$ est :

$$\text{non}(P) \ : \ (x \neq -1 \ \text{ et } y \neq -1) \text{ et } x + y + xy = -1$$

(b) La contraposée de $(P)$ est :

$$x + y + xy = -1 \Rightarrow (x = -1 \text{ ou } y = -1)$$

(c) Il y a plusieurs méthodes, on peut par exemple démontrer que la contraposée est vraie. On suppose que $x + y + xy = -1$, montrons que $x = -1$ ou $y = -1$. D'après notre hypothèse $x + y + xy + 1 = 0$, ce qui donne en factorisant $(x+1)(y+1) = 0$. On en déduit effectivement que $x = -1$ ou $y = -1$.

(d) La réciproque est également vraie. En effet, toujours en utilisant la contraposée, si l'on suppose que $x = -1$ ou $y = -1$ alors $(x+1)(y+1) = 0$. En développant, on obtient bien $x + y + xy = -1$, ce qui démontre l'implication réciproque et donc l'équivalence.

7. • **Analyse** Soit $f$ une fonction vérifiant la relation de l'énoncé, tentons de trouver des informations sur $f$. Appliquons la relation avec $x = 0$ et $y = f(0)$, cela donne :

$$f(f(0) - f(0)) = 2 - 0 - f(0) \Leftrightarrow f(0) = 2 - f(0) \Leftrightarrow f(0) = 1$$

Gardons en tête cette première information et appliquons la relation avec $x \in \mathbb{R}$ et $y = f(x)$. Cela donne :

$$f(f(x) - f(x)) = 2 - x - f(x) \Leftrightarrow f(0) = 2 - x - f(x) \Leftrightarrow f(x) = 1 - x \text{ (comme } f(0) = 1)$$

• **Synthèse.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 1 - x$. Démontrons que $f$ convient, c'est-à-dire qu'elle vérifie la relation de l'énoncé. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(y - f(x)) = 1 - (y - f(x)) = 1 - y + f(x) = 1 - y + 1 - x = 2 - x - y$$

Ce qui est la relation attendue.

$$\boxed{\text{Seule la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f : x \mapsto 1 - x \text{ convient}}$$

# Exercice : La suite de Fibonacci et nombre d'or

1. (a) On trouve :

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 |

(b) Pour démontrer ce résultat, on peut vérifier, par récurrence double sur $n \geq 5$, que :

$$\mathcal{H}_n \ : \ F_n \geq n$$

- **Initialisation.** On a $F_5 = 5 \geq 5$ et $F_6 = 8 \geq 6$, ce qui démontre que $\mathcal{H}_5$ et $\mathcal{H}_6$ sont vraies.

- **Hérédité.** Fixons $n \geq 5$ et supposons que $F_n \geq n$ et $F_{n+1} \geq n+1$. On a :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \geq n + 1 + n = 2n + 1 \geq n + 2 \quad (\text{car } 2n+1 \geq n+2 \Leftrightarrow n \geq 1)$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie et achève la récurrence. On sait que :

$$\boxed{\forall n \geq 5,\ F_n \geq n}$$

(c) Par passage à la limite, d'après le théorème de comparaison, cela implique que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} F_n = +\infty}$$

(d) L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ a pour discrimimant : $\Delta = 5$, elle possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Seul le réel $x_1$ est positif, on note :

$$\boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

(e) Grâce à l'étude menée dans la question précédente, on sait que l'autre solution de l'équation est :

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

D'autre part, on applique la technique de multiplication par la quantité conjuguée :

$$-\frac{1}{\varphi} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = -\frac{2-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ce qui est bien le résultat voulu. Les deux solution de l'équation sont :

$$\boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } -\frac{1}{\varphi}}$$

(f) Démontrons par récurrence double sur $n \geq 0$ que :

$$\mathcal{H}_n \ : \ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\Big)$$

• **Initialisation.** Pour $n = 0$, la formule devient $F_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big(1 - 1\Big) = 0$, ce qui est exact.

Pour $n = 1$, la formule devient :

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi + \frac{1}{\varphi}\Big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4}\Big) = 1$$

comme voulu.

• **Hérédité.** On suppose $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ vraies pour un entier naturel $n$ fixé. Démontrons $\mathcal{H}_{n+2}$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
F_{n+2} & = & F_{n+1} + F_n \\
 & = & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^{n+1} - (-\varphi)^{-(n+1)}\Big) + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\Big) \\
 & = & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big((\varphi^{n+1} + \varphi^n) - \Big(\Big(-\dfrac{1}{\varphi}\Big)^{n+1} + \Big(-\dfrac{1}{\varphi}\Big)^n\Big)\Big) \\
 & = & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^{n+2} - (-\varphi)^{-(n+2)}\Big)
\end{array}$$

Cette dernière étape étant correcte car $\varphi$ et $-\dfrac{1}{\varphi}$ sont solutions de l'équation $x^2 = x + 1$ donc de l'équation $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$ (en multipliant par $x^n$). Ceci démontre la formule au rang $n+2$ et termine la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\Big)}$$

(g) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^{n+1} - (-\varphi)^{-(n+1)}}{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}} = \frac{\varphi^{n+1}\Big(1 - \frac{(-\varphi)^{-(n+1)}}{\varphi^{n+1}}\Big)}{\varphi^n\Big(1 - \frac{(-\varphi)^{-n}}{\varphi^n}\Big)} = \varphi\frac{1 - \frac{(-\varphi)^{-(n+1)}}{\varphi^{n+1}}}{1 - \frac{(-\varphi)^{-n}}{\varphi^n}}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-\varphi)^{-n}}{\varphi^n} = \lim_{n\to+\infty} \Big(-\frac{1}{\varphi^2}\Big)^n = 0$ car $-\dfrac{1}{\varphi^2} \in ]-1, 1[$.

Ce qui démontre que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi}$$

*On peut démontrer que les fractions* $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ *sont les meilleures approximations rationnelles du nombre d'or. C'est-à-dire que parmi toutes les fractions dont le dénominateur est inférieur ou égal à* $F_n$*, c'est* $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ *qui est la plus proche de* $\varphi$*.*

*On pourrait de même étudier la suite de Lucas définie par :*

$$\begin{cases} L_0 = 2 \\ L_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \end{cases}$$

*On peut démontrer que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = \varphi^n + \left(-\dfrac{1}{\varphi}\right)^n$*. Il y a également de nombreuses études concernant la suite de Lucas, on peut citer le théorème de Cohn qui affirme que* $L_n$ *est le carré d'un entier si et seulement si* $n = 1$ *ou* $n = 3$*.*

2. (a) Démontrons la formule annoncée par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\mathcal{H}_n \ :\ \varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$$

• **Initialisation.** On a :

$$F_1\varphi + F_0 = \varphi \qquad \text{et} \qquad F_2\varphi + F_1 = \varphi + 1 = \varphi^2$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont vérifiées.

• **Hérédité.** On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ sont vraies. On a :

$$\varphi^{n+2} = \varphi^n\varphi^2 = \varphi^n(\varphi+1) = \varphi^{n+1} + \varphi^n = (F_{n+1}\varphi + F_n) + (F_n\varphi + F_{n-1}) = F_{n+2}\varphi + F_{n+1}$$

ceci en utilisant la définition de la suite de Fibonacci. Nous avons démontré $\mathcal{H}_{n+2}$ et cela achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}}$$

(b) Démontrons la formule annoncée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{H}_n \ :\ \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$$

• **Initialisation.** Pour $n = 0$, la formule devient $F_1 = F_2$, ce qui est vrai.

• **Hérédité.** On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} + F_{2n+3} = F_{2n+2} + F_{2n+3} = F_{2n+4}$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée et termine la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}}$$

(c) Démontrons la formule annoncée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{H}_n \ : \ \sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, la formule devient $F_0 = F_1 - 1$, ce qui est vrai.

- **Hérédité.** On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k} + F_{2n+2} = F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2} = F_{2n+3} - 1$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée et termine la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1}$$

(d) Démontrons la formule annoncée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{H}_n \ : \ \sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, la formule devient $F_0 = F_2 - 1$, ce qui est vrai.

- **Hérédité.** On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_k = \sum_{k=0}^{n} F_k + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée et termine la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1}$$

(e) Démontrons la formule annoncée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{H}_n \ : \ \sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, la formule devient $F_0^2 = F_0 F_1$, ce qui est vrai.

- **Hérédité.** On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=0}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2 = F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} F_{n+2}$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée et termine la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}}$$

(f) Démontrons la formule annoncée par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{H}_n \ : \ F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$$

- **Initialisation.** Pour $n=0$, on a bien : $F_1 = 1$ et $\binom{0}{0} = 1$. Pour $n=1$, on a bien : $F_2 = 1$ et $\binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 + 0 = 1$

- **Hérédité.** On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ vraies. On a :

$$\begin{aligned}
F_{n+3} &= F_{n+2} + F_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n-(i-1)}{i-1} \quad \text{en posant } i = k+1 \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1-i}{i} + \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n-(i-1)}{i-1} \quad \text{car } \binom{n+1}{-1} = 0 \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+2-i}{i} \quad \text{en utilisant la formule de Pascal} \\
&= \sum_{i=0}^{n+2} \binom{n+2-i}{i} \quad \text{puisque } \binom{0}{n+2} = 0
\end{aligned}$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie et termine la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}}$$

3. Supposons par l'absurde que $\sqrt{5} = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ premiers entre eux. On élève au carré pour avoir $5q^2 = p^2$ ($\bigstar$). On en déduit que $p^2$ est divisible par 5 ceci implique que $p$ est également divisible par 5. En effet, si le facteur 5 apparait dans la décomposition en facteurs premiers de $p^2$ alors il apparait également dans la décomposition en facteurs premiers de $p$.
Ainsi, on peut écrire $p = 5k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et la relation ($\bigstar$) devient $5q^2 = 25k^2$, c'est-à-dire $q^2 = 5k$. On en déduit alors que $q^2$ est divisible par 5 donc $q$ est divisible par 5.
Il est absurde que $p$ et $q$ soient tous les deux divisibles par 5 puisqu'ils sont premiers entre eux.
On en déduit que :

$$\boxed{\sqrt{5} \text{ est irrationnel}}$$

Par l'absurde, supposons que $\varphi = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \sqrt{5} = \frac{2p}{q} - 1$$

C'est absurde car $\sqrt{5}$ est irrationnel comme nous l'avons démontré.

$$\boxed{\varphi \text{ est irrationnel}}$$

4. (a) On complète la liste en sommant les deux éléments précédents selon la relation qui définie la suite de Fibonacci.

```python
def listefib(n):
    """renvoie la liste des n premiers nombres de Fibonacci"""
    # on traite d'abord les cas particuliers
    if n == 0:
        return([0])
    if n == 1:
        return([1])
    L = [0, 1] # initialisation avec les deux premiers nombres de Fibonacci
    for i in range(n - 2):
        L.append(L[-1] + L[-2]) # on somme les deux derniers éléments
    return(L)
```

(b) On utilise également la relation de récurrence :

```python
def fib1(n):
    """Calcul de Fn de façon itérative"""
    a = 0
    b = 1
    for i in range(n):
        a, b = b, a + b #on utilise des affectations simultanées
    return(a)
```

(c) On importe le module *math* pour avoir accès à la fonction *sqrt* :

```python
from math import *

def fib2(n):
    """Calcul de Fn avec la formule de Binet"""
    p = (1 + sqrt(5)) / 2 #le nombre d'or
    return(1 / sqrt(5) * (p ** n - (-p) ** (-n))) #la formule de Binet
```

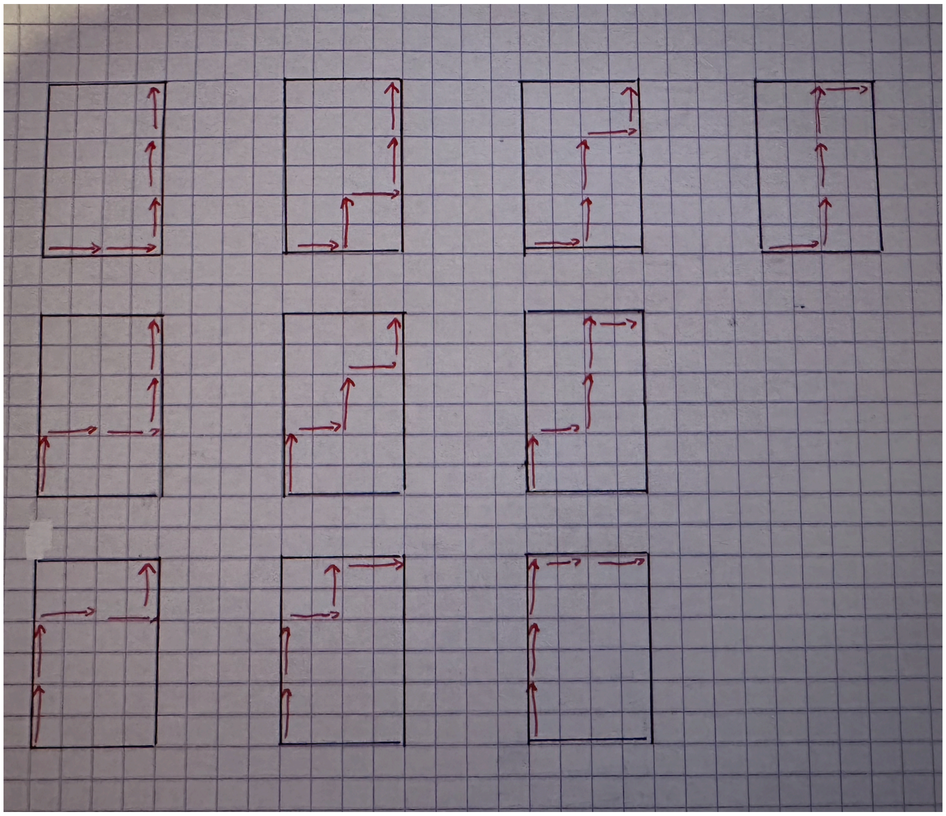
L'inconvénient de cette dernière fonction est que l'on travaille avec des flottants, cela induira des erreurs d'arrondis qui vont apparaitre et s'amplifier.

5. Voir document à part pour des questions intermédiaires menant à ce théorème.

# Problème : Dénombrement de promenades

## *Partie A : Échauffement en dimension 2*

1. Voici les 10 chemins possibles que l'on trouve :



2. La souris doit faire au total $a+b$ mouvements, soit vers le haut soit vers la droite. Afin de définir complètement un chemin possible, il suffit d'indiquer les instants où elle se déplace vers la droite. Cela revient à choisir $a$ mouvements parmi les $a+b$ mouvements au total et pour ce faire nous avons $\binom{a+b}{a}$ choix possibles. Une fois ces déplacements vers la droite choisis, les instants où la souris se déplace vers le haut sont imposés.

   Pour illustrer ceci, dans l'exemple de la question précédente, il y a 5 mouvements à faire, que l'on code ainsi :

   $$? \quad ? \quad ? \quad ? \quad ?$$

   Parmi ces 5 mouvements, choisissons la place des 2 déplacements vers la droite. Par exemple :

   $$? \quad \rightarrow \quad ? \quad \rightarrow \quad ?$$

   Les déplacements vers le haut sont imposés :

   $$\uparrow \quad \rightarrow \quad \uparrow \quad \rightarrow \quad \uparrow$$

   Dans ce cas particulier, il y a $\binom{5}{2}$ façons de choisir un chemin, ce qui vaut bien 10.

3. Comme nous l'avons vu dans la question précédente, un chemin peut être représenté par une suite de flèches, notons $h$ une flèche vers le haut et $d$ une flèche vers la droite. Le chemin de l'exemple précédent sera alors codé par : $hdhdh$. La problématique de cette question est de compter le nombre de mots de $2a$ lettres formés avec

$a$ fois la lettre $h$ et $a$ fois la lettre $d$ avec la condition supplémentaire que le nombre de $d$ soit à chaque étape supérieur ou égal au nombre de $h$.

Nous allons dénombrer plutôt les mots de $2a$ lettres comportant $a$ fois la lettre $h$ et $a$ fois la lettre $d$ ne vérifiant pas cette condition. Notons $F$ cet ensemble de mots. Notons également $X$ l'ensemble des mots de $2a$ lettres comportant exactement $a-1$ fois la lettre $h$ et $a+1$ fois la lettre $d$. Il est clair que le cardinal de $X$ est $\binom{2a}{a-1}$ puisqu'il suffit de choisir les places des lettres $h$ pour déterminer la position des lettres $d$.
Nous allons créer une bijection entre $F$ et $X$. Prenons un mot $u \in F$ et considérons la première occurence de la lettre $d$ qui contredise la condition, c'est-à-dire que si l'on arrête ce mot après cette lettre $d$, il y a strictement plus de $d$ que de $h$ et c'est la première fois que cela arrive. On modifie alors toutes les lettres qui suivent ce $d$ en remplaçant les $h$ par des $d$ et les $d$ par des $h$. On note $\Theta(u)$ le mot ainsi obtenu, il possède alors $a+1$ occurences de la lettre $d$ et $a-1$ occurences de la lettre $h$. On pose :

$$\Theta \ : \ \begin{array}{ccc} F & \to & X \\ u & \mapsto & \Theta(u) \end{array}$$

C'est effectivement une bijection, la façon de construire la bijection réciproque étant la suivante : si $v$ est un mot de $X$, on considère la première occurence de $d$ qui rende la lettre $d$ strictement majoritaire par rapport à la lettre $h$, on remplace les $h$ suivant cette lettre par les $d$ et les $d$ par des $h$ pour obtenir un mot de $F$.
Ainsi $\mathrm{Card}(F) = \binom{2a}{a-1}$. Le nombre de mots vérifiant la condition est : le nombre total de mots de longueur $2a$ comportant $a$ fois la lettre $h$ et $a$ fois la lettre $d$, il y en a $\binom{2a}{a}$ auquel on soustrait le cardinal de $F$.
On trouve :

$$\binom{2a}{a} - \binom{2a}{a-1} = \frac{1}{a+1}\binom{2a}{a}.$$

*Cette preuve combinatoire très élégante est due à Désiré André, mathématicien français. À ma connaissance, il n'existe pas de preuve plus directe de ce résultat.*

## *Partie B : Promenades sur un cube*

1. Si l'on part du sommet $A$ et que l'on revient au sommet $A$, le nombre de déplacements verticaux doit être pair. De même pour le nombre de déplacements horizontaux et en profondeur qui sont nécessairement des entiers pairs. On en déduit qu'il est impossible de trouver un chemin pour la souris avec un nombre impair d'étapes.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ impair, } N_n = 0}$$

2. On a vu que $N_1$ et $N_3$ valent 0.

   • Pour $N_2$, on a 3 parcours possibles : *vv*, *hh*, *pp*.

   • Pour $N_4$, avec la remarque sur la parité du nombre de déplacements verticaux, horizontaux ou en profondeur, nous avons 21 déplacements de longueur 4 :

*vvvv* *pppp* *hhhh*

*vvpp* *ppvv* *vpvp* *pvpv* *vppv* *pvvp*

*hhvv* *vvhh* *hvhv* *vhvh* *hvvh* *vhhv*

*pphh* *phph* *phhp* *hpph* *hphp* *hhpp*

3. Afin de former un déplacement possible de longueur $2q$ où $q \in \mathbb{N}^*$, nous devons :

• choisir où placer les $2k$ lettres $v$. En effet, le nombre de déplacements verticaux étant pair, on peut le noter $2k$ avec $k \in [\![0, q]\!]$. Nous avons $\binom{2q}{2k}$ façons de faire ce choix.

• choisir ensuite les $2l$ déplacements horizontaux puisque là aussi ils sont en nombre pair. On a $l \in [\![0, q-k]\!]$ afin que $2l \in [\![0, 2(q-k)]\!]$ puisque $2(q-k)$ est le nombre de déplacements restants. Nous avons $\binom{2(q-k)}{2l}$ façons de faire ce choix.

• les déplacements en profondeur seront alors imposés puisque les places des déplacements verticaux et horizontaux sont déjà choisies.

Au total d'après les encadrements sur $k$ et $l$ déjà mentionnés, nous avons, pour $n = 2q$ :

$$\boxed{N_n = \sum_{k=0}^{q} \binom{2q}{2k} \sum_{l=0}^{q-k} \binom{2q-2k}{2l}}$$

4. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, nous avons d'après la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{(x+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k}$$

(b) Pour $p \in \mathbb{N}$, on commence avec le membre de gauche :

$$\begin{aligned}
(x+1)^{2p} + (-x+1)^{2p} &= \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} x^k + \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-x)^k \\
&= \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (x^k + (-1)^k x^x) \\
&= 2 \sum_{i=0}^{p} \binom{2p}{2i} x^{2i}
\end{aligned}$$

Pour expliquer la dernière étape, il s'agit de constater que si $k$ est impair le terme de la somme est nul par contre si $k$ est pair, nous obtenons un terme $2x^k$. Un entier pair de l'intervalle $[\![0, 2p]\!]$ peut bien s'écrire sous la forme $2i$ avec $i \in [\![0, p]\!]$.

On en déduit la formule annoncée :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{p} \binom{2p}{2i} x^{2i} = \frac{(x+1)^{2p} + (-x+1)^{2p}}{2}}$$

(c) On commence par utiliser la formule de la question précédente avec $x = 1$ pour simplifier la somme intérieure. Pour $q \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, q]\!]$ :

$$\sum_{l=0}^{q-k} \binom{2q-2k}{2l} = \frac{(1+1)^{2(q-k)} + (-1+1)^{2(q-k)}}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = q \\ 2^{2(q-k)-1} & \text{si } k \in [\![0, q-1]\!] \end{cases}$$

À présent, on peut simplifier la somme double de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{q}\binom{2q}{2k}\sum_{l=0}^{q-k}\binom{2q-2k}{2l} &= \left(\sum_{k=0}^{q-1}\binom{2q}{2k}\sum_{l=0}^{q-k}\binom{2q-2k}{2l}\right)+1 \text{ en isolant le dernier terme de la somme}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{q-1}\binom{2q}{2k}2^{2(q-k)-1}\right)+1\\
&= 2^{2q-1}\left(\sum_{k=0}^{q-1}\binom{2q}{2k}\frac{1}{2^{2k}}\right)+1\\
&= 2^{2q-1}\left(\sum_{k=0}^{q}\binom{2q}{2k}\frac{1}{2^{2k}}\right)+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

La dernière étape s'effectuant en ajoutant le terme quand $k=q$ à la somme et en le retranchant, ce terme valant $\frac{1}{2}$. Pour calculer cette dernière somme, on utilise la formule de la question 4.(b) avec $x=\frac{1}{2}$ et $p=q$ :

$$\begin{aligned}
2^{2q-1}\left(\sum_{k=0}^{q}\binom{2q}{2k}\frac{1}{2^{2k}}\right)+\frac{1}{2} &= 2^{2q-1}\frac{(1/2+1)^{2q}+(-1/2+1)^{2q}}{2}+\frac{1}{2}\\
&= 2^{2q-2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2q}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2q}\right)+\frac{1}{2}\\
&= \frac{3^{2q}+3}{4}
\end{aligned}$$

On en déduit la formule annoncée :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{q}\binom{2q}{2k}\sum_{l=0}^{q-k}\binom{2q-2k}{2l}=\frac{3^{2q}+3}{4}}$$

(d) D'après la question 3, la quantité calculée dans la question précédente vaut $N_{2q}$, on en déduit que pour $n$ un entier naturel pair :

$$\boxed{N_n=\frac{3^n+3}{4}}$$

Pour $n=2$, on retrouve $N_2=\frac{9+3}{4}=3$. Pour $n=4$, on retrouve $N_4=\frac{3^4+3}{4}=\frac{84}{4}=21$.

## *Partie C : Attention au chat*

1. Si le chat et la souris se trouvent sur la même case, c'est nécessairement sur une case de la diagonale, c'est-à-dire les cases $(0,2)$, $(1,1)$ ou $(2,0)$.

   • La probabilité que le chat arrive en deux mouvements sur la case $(0,2)$ est $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ car cela correspond à deux mouvements consécutifs vers le haut. De même pour la souris avec des mouvements vers la gauche. La probabilité que le chat et la souris se rencontrent sur la case $(0,2)$ est donc $\frac{1}{16}$.

   *On a supposé implicitement que les mouvements successifs du chat et de la souris sont indépendants.*

- La probabilité que le chat arrive en deux mouvements sur la case $(2,0)$ est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ car cela correspond à deux mouvements consécutifs vers le haut. De même pour la souris avec des mouvements vers le bas. La probabilité que le chat et la souris se rencontrent sur la case $(2,0)$ est donc $\frac{1}{16}$.

- La probabilité que le chat arrive en deux mouvements sur la case $(1,1)$ est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ car cela correspond aux séquences haut-droite et droite-haut. De même pour la souris. La probabilité que le chat et la souris se rencontrent sur la case $(1,1)$ est donc $\frac{1}{4}$.

Au final la probabilité que le chat mange la souris est $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$, les événements mis en jeu étant incompatibles ce qui permet de sommer les probabilités.

$$\boxed{p_2 = \frac{3}{8}}$$

2. La position initiale du chat est $(0,0)$ et à chaque mouvement l'une des coordonnées est incrémentée de 1. Ainsi pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la position $(i,j)$ du chat au bout de $k$ mouvements vérifie $i + j = k$.
De même pour la souris, c'est-à-dire que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la position $(i',j')$ de la souris au bout de $k$ mouvements vérifie $i' + j' = 2n - k$.
Finalement, la position $(i,j)$ du chat est égale à la position $(i',j')$ de la souris si et seulement si $i+j = i'+j' = n$, c'est-à-dire au bout de $n$ mouvements. Dans ce cas chat et souris sont sur une case de coordonnées : $(i, n-i)$ où $i \in [\![0,n]\!]$.

$$\boxed{\text{Si le chat et la souris se rencontrent, c'est sur une case de la forme } (i,n-i) \text{ où } i \in [\![0,n]\!]}$$

3. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Le nombre de chemins allant de la case $(0,0)$ à la case $(i,n-i)$ est $\binom{n}{i}$. En effet, choisir un déplacement pour le chat qui se termine sur la case $(i,n-i)$ revient à choisir les $i$ déplacements où le chat va vers la droite parmi les $n$ déplacements, les déplacements vers le haut seront alors imposés.

   De plus, chaque chemin correspond à une suite de $n$ mouvements indépendants vers le haut ou vers la droite dont chacun a une probabilité $\frac{1}{2}$ de se produire. Ce qui démontre que chaque chemin suivi par le chat et menant à la case $(i,n-i)$ a la probabilité $\frac{1}{2^n}$ de se produire. Finalement, on a le résultat annoncé :

$$\boxed{\text{La probabilité que le chat arrive sur la case } (i,n-i) \text{ est } \frac{1}{2^n}\binom{n}{i}}$$

4. Le raisonnement de la question précédente est exactement le même pour la souris. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, la probabilité que la souris arrive sur la case $(i,n-i)$ est également $\frac{1}{2^n}\binom{n}{i}$. Ainsi la probabilité que le chat et la souris se rencontrent sur la case $(i,n-i)$ est $\frac{1}{2^n}\binom{n}{i} \times \frac{1}{2^n}\binom{n}{i} = \frac{1}{4^n}\binom{n}{i}^2$, en effet les déplacements du chat et de la souris sont indépendants. Les événements $A_i$ : "le chat et la souris se rencontrent sur la case $(i,n-i)$" définis pour $i \in [\![0,n]\!]$ sont incompatibles deux à deux ainsi la probabilité de leur union est égale à la somme des probabilités. C'est-à-dire :

$$\boxed{p_n = \frac{1}{4^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2}$$

5. D'une part, d'après la formule du binôme :

$$(1+x)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} x^i$$

D'autre part, on a :

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\Big)$$

Cette dernière somme s'écrit :

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{j} x^{k+j}$$

Dans cette somme, nous obtenons un terme de degré $n$ lorsque $j = n-k$, le coefficient de $x^n$ est donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

en utilisant la formule de symétrie.

En identifiant avec le coefficient devant $x^n$ dans le premier développement, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Finalement, on a la simplification :

$$\boxed{p_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$$