1-Vrai ou faux : la fonction exponentielle est nulle au voisinage de $-\infty$.

2-Écrire avec des quantificateurs la négation de $\lim_{x \to a} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ adhérent à l'ensemble de définition de f.

3-On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ adhérent à l'ensemble de définition de f. Démontrer que f est bornée au voisinage de a.

4-Trouver un exemple de fonction f définie sur I et de suite (u_n) qui tend vers $a \in I$ telle que $(f(u_n))$ ne tend pas vers $f(a)$.

5-Soit f et g définies sur I et $a \in \mathbb{R}$ adhérent à I. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = l'$ avec $(l, l') \in \mathbb{R}^2$, démontrer que : $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = l + l'$.

1-Vrai ou faux : la fonction exponentielle est nulle au voisinage de $-\infty$.

Réponse : C'est faux, il n'est pas possible de trouver un intervalle du type $]-\infty, B]$ où $B \in \mathbb{R}$ sur lequel la fonction exponentielle est nulle.

2-Écrire avec des quantificateurs la négation de $\lim_{x \to a} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ adhérent à l'ensemble de définition de f.

Réponse : Cela donne :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in I,\ |x - a| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - l| > \varepsilon$$

3-On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ adhérent à l'ensemble de définition de f. Démontrer que f est bornée au voisinage de a.

Réponse : On utilise la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, cela donne :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq 1$$

C'est-à-dire que :

$$\forall x \in [a - \alpha, a + \alpha] \cap I,\ f(x) \in [l - 1, l + 1]$$

Ce qui démontre que f est bornée au voisinage de a.

4-Trouver un exemple de fonction f définie sur I et de suite (u_n) qui tend vers $a \in I$ telle que $(f(u_n))$ ne tend pas vers $f(a)$.

Réponse : On considère la fonction partie entière, définie sur $\mathbb{R}$. On considère la suite définie pour $n \geq 0$ par $u_n = -\dfrac{1}{n+2}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. Pourtant pour $n \geq 0$:

$$\left\lfloor -\frac{1}{n+2} \right\rfloor = -1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -1$$

Cette limite est différente de $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

5-Soit f et g définies sur I et $a \in \mathbb{R}$ adhérent à I. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = l'$ avec $(l, l') \in \mathbb{R}^2$, démontrer que : $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = l + l'$.

Réponse : Soit $\underline{\varepsilon > 0}$, par définition de la limite :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists \beta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \beta \Rightarrow |g(x) - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour $\underline{x \in I \text{ avec } |x - a| \leq \min(\alpha, \beta)}$, on a :

$$\underline{|f(x) + g(x) - (l + l')|} \leq |f(x) - l| + |g(x) - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\varepsilon}$$

C'est la définition de : $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = l + l'$.