Introduction

Le vendredi 14 octobre 2025, vers 18h, chez Dali, parrain de la mafia napolitaine.
***Pietro** (transpirant) : Boss, vous vouliez me voir ?*
***Dali** (voix grave, chevrotante) : Pietro, est-ce que je peux te faire confiance ?*
***Pietro** : Je suis toujours là pour vous, Padre.*
***Dali** : J'ai un travail important pour toi.*
***Pietro** (le coeur battant) : ...*
***Dali** : Tu sais, le temps passe et je ne suis pas éternel. J'ai un peu d'argent de côté pour préparer la suite. Il sera pour mes quinze plus fidèles lieutenants dont tu fais partie Pietro. Tu as étudié les mathématiques je crois ?*
***Pietro** (déconcerté) : Oui, c'est moi qui tient la comptabilité de notre association, Padre.*
***Dali** (le coeur battant) : Bene, bene. Cet argent est dans un coffre. J'aimerais fabriquer des clés chacune en trois exemplaires. J'aimerais distribuer ces clés à tous les quinze afin que deux d'entre vous choisis de façon quelconque aient toujours une et une seule clé en commun. Parce que...*
***Pietro** : Parce que ?*
***Dali** (sec) : Parce que je n'ai pas confiance. Il faudrait pour ouvrir ce coffre trois clés identiques. Pietro, j'aimerais savoir combien, il me faut de clés et comment les distribuer. Est-ce que j'ai bien fait de m'adresser à toi, Pietro ?*
***Pietro** : C'est que...*
***Dali** : Bien, je savais que je pouvais compter sur toi. J'aimerais que ce soit réglé avant dimanche 12h car je vois mon notaire l'après-midi.*

Pietro avait moins de 48 heures pour résoudre ce problème dont il n'avait aucune idée de la difficulté. Dali était sans piété : ceux qui le décevaient étaient le plus souvent victimes d'une fâcheuse chute dans le bassin des crocodiles...

Définitions et notations

- On considère un ensemble fini E et on note n son cardinal.
- Pour $k \in \mathbb{N}$, on rappelle que $\mathcal{P}_k(E)$ désigne l'ensemble des parties de E à k éléments. Cet ensemble étant éventuellement vide si $k > n$.
- On rappelle que le cardinal de $\mathcal{P}_k(E)$ est $\binom{n}{k}$. En effet, il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir k éléments dans un ensemble à n éléments.
- On note $\mathcal{E}$ un ensemble de parties à trois éléments de E et on note p le cardinal de $\mathcal{E}$.
- On dit que $\mathcal{E}$ est un **système de Steiner d'ordre** n si et seulement si toute partie de E à deux éléments est incluse dans un unique élément de $\mathcal{E}$. Ce qui se traduit par :

$$\forall P \in \mathcal{P}_2(E),\ \exists! A \in \mathcal{E},\ P \subset A$$

- Les parties à deux éléments de E pourront être appelées des paires. Les parties à 3 éléments de E, en particulier les éléments de $\mathcal{E}$, pourront être appelées des triplets.
- Un entier naturel sera appelé un nombre de Steiner si et seulement s'il existe un système de Steiner sur un ensemble à n éléments, il est clair que le nom des éléments de l'ensemble n'affecte pas cette propriété. On note J l'ensemble des nombres de Steiner. Par convention $0 \in J$.
- Le but de Pietro est de créer un système de Steiner d'ordre 15, chaque élément correspond à un membre de la mafia. Chaque ensemble appartenant à $\mathcal{E}$ est une clé dont les éléments sont les mafieux la possédant.
  Deux mafieux quelconques auront ainsi une et une seule clé en commun comme voulu par Dali.

Acte I - Premiers exemples

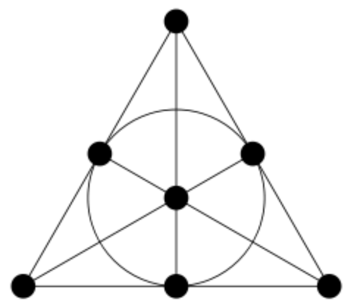
Vendredi, dans la soirée. Pietro attablé à son bureau, avait du mal à saisir exactement ce que son chef voulait. Il se dit qu'il était préférable de commencer par quelques exemples pour comprendre la situation.

1. On considère l'ensemble à 7 éléments : $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. On pose :

$$\mathcal{E} = \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f, g\}, \{b, d, f\}, \{b, e, g\}, \{c, d, g\}, \{c, e, f\}\}$$

   (a) Vérifier que $\mathcal{E}$ est un système de Steiner d'ordre 7.

   (b) Que vous inspire le dessin ci-dessous ?



2. Montrer qu'il n'existe pas de système de Steiner d'ordre 2 et 4.
3. Montrer qu'il existe des systèmes de Steiner d'ordre 1 et 3.

Fort de ces premiers exemples, Pietro pensait qu'en tâtonnant un peu, il allait résoudre ce problème pour un ensemble à 15 éléments.

Acte II - Condition nécessaire sur les nombres de Steiner

Dimanche, 2 heures du matin. Après une nuit blanche et une journée complète de recherche, Pietro était exténué par cette recherche exhaustive, il était à présent convaincu qu'il n'avait aucune chance de cette manière. Un frisson lui parcourut l'échine : et si c'était impossible ? Blême et le coeur battant la chamade, il essaya de se détendre. Je vais procéder à l'envers se dit-il, ce genre de raisonnement fonctionne en mathématiques. Supposons qu'une solution existe...

Soit E un ensemble à n éléments et $\mathcal{E}$ un système de Steiner de E à p éléments.

1. On considère $X = \{(P, A) \in \mathcal{P}_2(E) \times \mathcal{E},\ P \subset A\}$.

   (a) Quel est le cardinal de X ?

   (b) On considère l'application :

$$\Gamma \ : \ \begin{array}{ccc} X & \to & \mathcal{P}_2(E) \\ (\{x, y\}, A) & \mapsto & \{x, y\} \end{array}$$

   À quelle condition Γ est-elle surjective ? injective ? bijective ?

   (c) En déduire que $p = \dfrac{n(n-1)}{6}$.

2. Montrer que si $\mathcal{E}$ est un système de Steiner alors chaque élément de E appartient à exactement $\dfrac{n-1}{2}$ éléments de $\mathcal{E}$.
3. En déduire que si $n \in \mathbb{N}^*$ est un nombre de Steiner alors $n \equiv 1\ [6]$ ou $n \equiv\ 3\ [6]$.

Alors $15 = 12 + 3$*, ouf ! Pietro bénit* 15 *d'être congru à* 3 *modulo* 6*. Il partit dans un fou rire nerveux, cette information, même si elle était intéressante, ne lui permettait pas de savoir s'il y avait une solution et encore moins de la trouver. Il restait* 7 *heures.*

Entracte - Utilisation de Python

Il était 3 *heures du matin et Pietro était tétanisé en repensant au bassin rempli de crocodiles affamés. Python ! Cette association d'idée allait peut-être lui sauver la vie. Il mit en route son ordinateur et se fit chauffer un bon café.*

Nous allons utiliser les listes comme structure de données, les éléments de ces listes seront des entiers naturels.

1. Écrire une fonction, $P2$, qui étant donnée une liste E renvoie toutes les parties de E à deux éléments présentées également dans une liste. On devra par exemple obtenir :
```
>>> P2([1, 2, 3, 4])
[[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4]]
```
2. Écrire une fonction, $P3$, qui étant donnée une liste E renvoie toutes les parties de E à 3 éléments présentées également dans une liste.
3. Écrire une fonction, *inclusion*, qui prend en paramètres une liste de deux éléments L et une liste de trois éléments M et qui renvoie 1 si les deux éléments de L appartiennent à M et 0 sinon.
4. Écrire une fonction, *occurrence*, qui prend en paramètres une liste de deux éléments L et une liste de triplets S et renvoie le nombre de triplets qui contiennent la liste L.
5. Écrire une fonction, *teststeiner*, qui prend en paramètres un ensemble d'entiers naturels, E, et une liste de listes à 3 éléments, S, et renvoie 1 si S est un système de Steiner pour E et 0 sinon. On pourra tester ce programme avec l'exemple de la partie A.
6. Écrire une fonction, *recherchesteiner*, qui prend en paramètres un ensemble E à n éléments et un entier naturel $Nmax$. Cette fonction va créer au hasard une liste contenant $\dfrac{n(n-1)}{6}$ listes de 3 éléments de E et va tester si cette liste est un système de Steiner pour E. Cette opération sera repétée au plus $Nmax$ fois. On affichera les systèmes de Steiner trouvés.
7. Avez-vous trouvé un système de Steiner sur un ensemble à 7 éléments ? Sur un ensemble à 15 éléments ?

Pietro était dépité, il était 7 *heures du matin, son ordinateur tournait depuis une heure avec un ensemble à* 15 *éléments, sans succès...*

Acte III - 15 est un nombre de Steiner

Pietro savait qu'il fallait reprendre tout à zéro et commencer une étude sérieuse du problème.
C'était caïman le seul espoir qu'il lui restait.

1. Soit E un ensemble et $\mathcal{E}$ un système de Steiner sur E. Une partie F de E sera dite stable si, lorsque deux éléments d'un triplet quelconque de $\mathcal{E}$ sont dans F, alors le troisième y est aussi.
   (a) Montrer que si F est une partie stable de E alors l'ensemble $\mathcal{F}$ des triplets de $\mathcal{E}$ qui sont inclus dans F forme un système de Steiner sur F. On le qualifie de sous-système de Steiner de $\mathcal{E}$, il a pour ordre le cardinal de F.
   (b) Montrer que tout système de Steiner d'ordre $n \geq 1$ admet un sous-système de Steiner d'ordre 1.
   (c) Montrer que tout système de Steiner d'ordre $n \geq 3$ admet un sous-système de Steiner d'ordre 3.

2. Soit P un ensemble fini de cardinal $s \in \mathbb{N}^*$. On note $< a, b, c >$ une liste non ordonnée de trois éléments de P qui ne sont pas forcément distincts. Cela signifie par exemple que $< a, b, c >$ et $< b, c, a >$ sont considérées comme étant égales. Un ensemble $\mathcal{P}$ de telles listes sera qualifié de pseudo-système de Steiner si et seulement si :
$$\forall (a, b) \in P^2,\ \exists! c \in P,\ < a, b, c > \in \mathcal{P}$$
On souhaite établir l'existence d'un tel système. On numérote les éléments de P en posant :
$$P = \{a_i,\ i \in [\![0, s-1]\!]\}$$
On pose :
$$\mathcal{P} = \{< a_i, a_j, a_k >,\ i + j + k \equiv 0\ [s]\}$$
Montrer que $\mathcal{P}$ est un pseudo-système de Steiner de P.
3. Soit E et G deux ensembles admettant des systèmes de Steiner, $n = \mathrm{Card}(E)$ et $m = \mathrm{Card}(G)$, avec éventuellement E ou G l'ensemble vide. On considère :
   - $\mathcal{E}$ un système de Steiner sur E
   - $\mathcal{G}$ un système de Steiner sur G
   - R une partie stable de E et $\mathcal{R}$ le sous-système de Steiner correspondant
   - on pose $r = \mathrm{Card}(R)$
   - $P = E \setminus R$ et $s = \mathrm{card}(P) = n - r$
   - $\mathcal{P}$ un pseudo système de Steiner sur P
   - $L = R \cup (P \times G)$

   On va démontrer qu'il existe un système de Steiner sur L. Il ne faut pas être freiné par le fait que certains éléments de L soient des couples, ce sont des éléments comme les autres !

   On considère l'ensemble $\mathcal{L}$ formé des triplets de L suivants :

   Type 1 : les éléments de $\mathcal{R}$.

   Type 2 : les triplets de la forme $\{a, (b, g), (c, g)\}$ où $a \in R$, $b \in P$, $c \in P$, $g \in G$ et $\{a, b, c\} \in \mathcal{E}$.

   Type 3 : les triplets de la forme $\{(a, g), (b, g), (c, g)\}$ où a, b et c appartiennent à P, $g \in G$ et $\{a, b, c\} \in \mathcal{E}$.

   Type 4 : les triplets de la forme $\{(a, g_1), (b, g_2), (c, g_3)\}$ où g_1, g_2, g_3 sont des éléments de G tels que $\{g_1, g_2, g_3\} \in \mathcal{G}$ et a, b, c appartiennent à P tels que $< a, b, c > \in \mathcal{P}$.

   (a) Prenons $E = \{a, b, c\}$, $G = \{1, 2, 3\}$ et $R = \{a\}$. Expliciter $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{R}$, r, P, s, $\mathcal{P}$, L et $\mathcal{L}$. Que remarque t-on ?

   (b) Quel est le cardinal de L ?

   (c) Le but de cette question est de démontrer que $\mathcal{L}$ est un système de Steiner sur l'ensemble L. Pour cela, on considère x et y deux éléments distincts de L et on considère les trois cas suivants.

      i. On suppose que $x \in R$ et $y \in R$, montrer que la paire $\{x, y\}$ est incluse dans un unique triplet de $\mathcal{L}$ et que celui-ci est de type 1.

      ii. On suppose que $x \in R$ et $y \in P \times G$, montrer que la paire $\{x, y\}$ est incluse dans un unique triplet de $\mathcal{L}$ et que celui-ci est de type 2.

      iii. On suppose que $x \in P \times G$ et $y \in P \times G$, montrer que la paire $\{x, y\}$ est incluse dans un unique triplet de $\mathcal{L}$ et que celui-ci est de type 2, 3 ou 4.

      iv. Conclure.
4. Montrer que :

   (a) $(n \in J) \Rightarrow (3n \in J)$

   (b) $(n \in J \text{ et } n \geq 1) \Rightarrow (3n - 2 \in J)$

   (c) $(n \in J \text{ et } n \geq 3) \Rightarrow (3n - 6 \in J)$

5. En déduire que 7, 9, 15, 19, 21, 25, 27 sont des nombres de Steiner.

   Pietro jubilait, il savait à présent que le problème avait une solution et même si celle-ci n'était pas simple, il avait tous les outils en main pour expliciter ce système de Steiner d'ordre 15 *et répondre ainsi à l'ultimatum de Dali.*

6. On considère $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ muni du système de Steiner $\mathcal{E}$ donné à la question 1. de la partie I.
   On pose $G = \{1, 2, 3\}$ et $R = \{a, b, c\}$.
   (a) Rappeler $\mathcal{E}$, expliciter $\mathcal{G}$ et $\mathcal{R}$. Donner r, s, P.
   (b) Former l'ensemble $\mathcal{P}$ défini dans la question 2., on numérote les éléments de P ainsi : $a_0 = d$, $a_1 = e$, $a_2 = f$ et $a_3 = g$.
   (c) Expliciter l'ensemble L. Combien a-t-il d'éléments ?
   (d) Combien d'éléments va avoir $\mathcal{L}$?
   (e) Expliciter les éléments de $\mathcal{L}$. Il est possible de le faire à la main, type par type, ou d'utiliser le logiciel Python.

Pietro exultait, il avait vaincu ce problème difficile. Il lui restait même deux heures avant son rendez-vous avec son boss, Mr Gatore, pour lui expliquer comment il avait triomphé de ce problème.

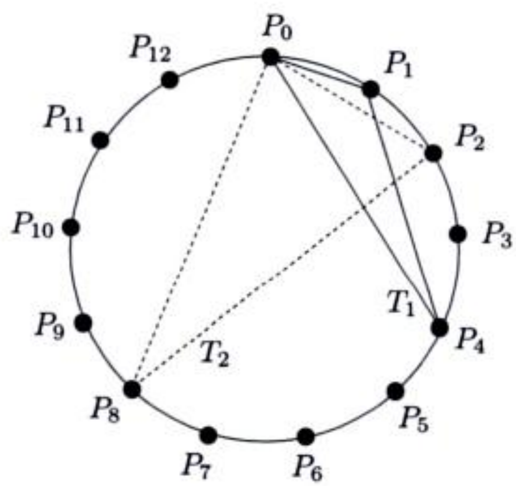
Acte IV - Le cercle des 13 *points*

Une question restait en suspens. Le nombre 13 *était congru à* 1 *modulo* 6*, il n'avait donc pas d'objection immédiate à ce qu'il soit un nombre de Steiner. Pourtant la construction précédente ne permettait pas d'obtenir un système de Steiner sur un ensemble à* 13 *éléments. Pietro regarda l'horloge de sa chambre, il lui restait encore un peu de temps, la vision des nombres de* 1 *à* 12 *régulièrement espacés sur ce cadran lui donna une idée.*

On considère un ensemble E de 13 points régulièrement disposés sur un cercle et numérotés de P_0 à P_{12}.

Pour $(i, j) \in [\![0, 12]\!]^2$, on désigne par distance de P_i à P_j le nombre d'intervalles de l'arc de cercle le plus court joignant P_i à P_j. Par exemple, la distance entre P_4 et P_9 vaut 5.

On considère les deux triangles $T_1 = \{P_0, P_1, P_4\}$ et $T_2 = \{P_0, P_2, P_8\}$.



1. Soit C l'ensemble des paires $\{P_i, P_j\}$ où P_i et P_j sont deux points distincts du même triangle T_1 ou T_2.
   Montrer que l'application qui à une telle paire associe la distance entre ses éléments est une bijection de C dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des parties de E qui sont obtenues à partir de T_1 ou T_2 par une rotation. Montrer que $\mathcal{E}$ est un système de Steiner sur E.
3. Retrouver par une méthode semblable que 7 est un nombre de Steiner.

Acte V - Caractérisation des nombres de Steiner

1. On reprend la construction et les notations de la question 3. de l'acte III. On suppose que l'entier r vérifie $0 < r < n$ et $m \geq 3$. On considère $a \in R$ et $b \in P$. Soit $c \in E$ tel que $\{a, b, c\} \in \mathcal{E}$.
   (a) Démontrer qu'il est possible de choisir $\mathcal{P}$ tel que $< b, b, b >$ et $< b, c, c >$ soient des éléments de $\mathcal{P}$.
   (b) Vérifier alors que le système de Steiner $\mathcal{L}$ sur L admet un sous-système de Steiner d'ordre 7.
2. On note T l'ensemble des entiers pour lesquels il existe un système de Steiner admettant un sous-système d'ordre 7. Justifier les implications suivantes :
   (a) $(n \in T) \Rightarrow (3n \in T)$
   (b) $(n \in J \text{ et } n > 1) \Rightarrow (3n - 2 \in T)$
   (c) $(n \in J \text{ et } n > 3) \Rightarrow (3n - 6 \in T)$
   (d) $(n \in T) \Rightarrow (3n - 14 \in T)$
   (e) $(m \in J) \Rightarrow (2m + 1 \in T)$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si $n \equiv 1\ [6]$ ou $n \equiv 3[6]$ alors l'un des nombres : $\dfrac{n}{3}$, $\dfrac{n+2}{3}$, $\dfrac{n+6}{3}$, $\dfrac{n+14}{3}$ est un entier congru également à 1 ou 3 modulo 6.
4. Montrer que T contient tous les entiers n congrus à 1 ou 3 modulo 6 et vérifiant $n \in [\![15, 44]\!]$.
5. Montrer que T contient tous les entiers $n \geq 15$ congrus à 1 ou 3 modulo 6.
6. En déduire l'ensemble des nombres de Steiner.

Épilogue

Dimanche, vers 12h.
Pietro *(en effervescence) : Padre, padre, j'ai trouvé ! Voici ma solution (il tend à Dali plusieurs feuilles de papier).*
Dali *: Je savais que tu ne me décevrais pas. Mais il y a un souci avec Luigi, il est mort.*
Pietro *: Vous l'avez tué ?*
Dali *: Tué ? Non ! Un accident, il est tombé dans le bassin dans le jardin et puis... Enfin, tu vois.*
Vous n'êtes plus que quartorze à présent.