1-Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x + \sin(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2-Démontrer que pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$.

3-Existe-t-il une fonction définie sur $\mathbb{R}$, non constante, qui admet un extremum en chaque point ?

4-Justifier que $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne de coefficient $\dfrac{1}{2}$ sur $[1, +\infty[$.

5-Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et dérivable. Est-il vrai que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$?

6-Majorer l'erreur commise en faisant l'approximation de $\sqrt{10001}$ par 100.

7-Démontrer que : $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{15} \leq \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{3}{5}\right) \leq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{8}$.

8-Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

1-Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x + \sin(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Réponse : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 + \cos(x) \geq 0$$

De plus f' ne s'annule qu'en des points isolés, ceux de l'ensemble $\{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2-À l'aide du T.A.F, démontrer que pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$.

Réponse : Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, avec par exemple $x < y$. On applique le T.A.F à la fonction sin sur l'intervalle $[x, y]$. La fonction sin est continue et dérivable sur $[x, y]$, il existe $c \in]x, y[$ tel que :

$$\cos(c) = \frac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x}$$

On en déduit que : $\left|\dfrac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x}\right| \leq 1$, c'est-à-dire :

$$|\sin(y) - \sin(x)| \leq |y - x|$$

Cette inégalité étant vraie également si $x = y$.

3-Existe-t-il une fonction définie sur $\mathbb{R}$, non constante, qui admet un extremum en chaque point ?

Réponse : La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ convient, elle prend comme valeurs 1 (maximum) ou 0 (minimum).

4-Justifier que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne de coefficient $\dfrac{1}{2}$ sur $[1, +\infty[$.

Réponse : La fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \in [1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\forall x \in [1, +\infty[, \ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

D'après le cours, on en déduit que f est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ de coefficient $\dfrac{1}{2}$.

5-Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et dérivable. Est-il vrai que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$?

Réponse : C'est faux, une fonction dérivable en 0 n'a pas forcément sa dérivée continue en 0. On a vu en cours que :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que sa dérivée n'a pas de limite en 0.

6-Majorer l'erreur commise en faisant l'approximation de $\sqrt{10001}$ par 100.

Réponse : On applique l'I.A.F à la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[10000, 10001]$. La fonction f est continue et dérivable sur cet intervalle et :

$$\forall x \in [10000, 10001],\ |f'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{10000}} = \frac{1}{200}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que :

$$|\sqrt{10001} - \sqrt{10000}| \leq \frac{1}{200}|10001 - 10000|$$

L'erreur commise en faisant l'approximation de $\sqrt{10001}$ par 100 est inférieure à $\dfrac{1}{200}$.

7-Démontrer que : $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{15} \leq \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{3}{5}\right) \leq \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{8}$.

Réponse : Sachant que $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, l'inégalité se réécrit :

$$\frac{\sqrt{3}}{15} \leq \operatorname{Arcsin}\left(\frac{3}{5}\right)-\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8}$$

Appliquons l'I.A.F à la fonction Arcsin qui est continue et dérivable sur $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}\right]$. On encadre sa dérivée :

$$\forall x \in\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right], \ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}}$$

En simplifiant cela donne :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right],\ \frac{2}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{5}{4}$$

En appliquant, l'I.A.F, il vient :

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{\sqrt{3}} \leq \operatorname{Arcsin}\left(\frac{3}{5}\right) - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{5}{4}$$

En simplifiant, on obtient exactement la formule annoncée :

$$\frac{\sqrt{3}}{15} \leq \operatorname{Arcsin}\left(\frac{3}{5}\right) - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8}$$

8-Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ telle que $f(a)=f'(a)$ et $f(b)=f'(b)$. Démontrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $f''(c)=f(c)$.

Réponse : On considère la fonction $g : x \mapsto (f'(x)-f(x))e^x$ définie et dérivable sur $[a,b]$ puisque f et f' sont définies et dérivables sur $[a,b]$. On a : $g(a)=g(b)=0$, ainsi d'après le théorème de Rolle : g' s'annule. Or :

$$g' : x \mapsto (f''(x)-f'(x))e^x+(f'(x)-f(x))e^x=(f''(x)-f(x))e^x$$

Ainsi, il existe $c\in]a,b[$ tel que :

$$g'(c)=0 \Leftrightarrow f''(c)=f(c)$$