1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)(k+4)}{(k+2)(k+3)}\right)$.

Corrigé : Calculons la valeur de la somme dont on prendra la limite dans un second temps. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)(k+4)}{(k+2)(k+3)}\right) = \sum_{k=0}^{n}(\ln(k+1) - \ln(k+2)) + \sum_{k=0}^{n}(\ln(k+4) - \ln(k+3))$$

On reconnait deux sommes télescopiques :

$$S_n = (\ln(1) - \ln(n+2)) + (\ln(n+4) - \ln(3)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(3)$$

$$\boxed{\text{La limite vaut } -\ln(3)}$$

2. On considère la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}$$

Décomposer f en éléments simples et en déduire une primitive de f sur un ensemble à préciser.

Corrigé : Il faut commencer par trouver les racines du dénominateur afin de le factoriser. Nous n'avons pas de méthode générale pour résoudre une équation polynomiale de degré 3, il faut donc chercher une racine évidente. On voit que $x = 1$ convient, ce qui nous permet de factoriser par $x - 1$:

$$x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = (x-1)(x^2 - 7x + 12)$$

Le facteur $x^2 - 7x + 12$ a pu être trouvé en complétant la factorisation de proche en proche ou en posant la division euclidienne de $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ par $x - 1$.
On trouve ensuite les racines de $x^2 - 7x + 12$, qui sont 3 et 4, pour finir la factorisation. On obtient :

$$x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = (x-1)(x-3)(x-4)$$

On cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\frac{1}{x^3 - 8x^2 + 19x - 12} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-3} + \frac{\gamma}{x-4}$$

On verra plus tard dans l'année une technique efficace pour déterminer α, β et γ. Pour l'instant, on réduit au même dénominateur et on identifie :

$$\frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-3} + \frac{\gamma}{x-4} = \frac{\alpha(x-3)(x-4) + \beta(x-1)(x-4) + \gamma(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x-4)} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)x^2 - (7\alpha+5\beta+4\gamma)x + 12\alpha + 4\beta + 3\gamma}{(x-1)(x-3)(x-4)}$$

Nous obtenons l'égalité des deux fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{x^3 - 8x^2 + 19x - 12} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)x^2 - (7\alpha+5\beta+4\gamma)x + 12\alpha + 4\beta + 3\gamma}{(x-1)(x-3)(x-4)}$$

Les deux polynômes au numérateur sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, en identifiant nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ 7\alpha + 5\beta + 4\gamma & = & 0 \\ 12\alpha + 4\beta + 3\gamma & = & 1 \end{cases}$$

On résout ce système avec la méthode du pivot pour obtenir :

$$\alpha = \frac{1}{6} \qquad \beta = -\frac{1}{2} \qquad \gamma = \frac{1}{3}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\frac{1}{x^3 - 8x^2 + 19x - 12} = \frac{1}{6(x-1)} - \frac{1}{2(x-3)} + \frac{1}{3(x-4)}}$$

On note I l'un des intervalles suivants : $]-\infty, 1[$, $]1, 3[$, $]3, 4[$ ou $]4, +\infty[$. Une primitive de f sur I est :

$$\boxed{F : x \mapsto \frac{1}{6}\ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\ln(|x-3|) + \frac{1}{3}\ln(|x-4|)}$$

3. La fonction suivante, définie sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$, possède-t-elle une limite en 0 ?

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x\mathrm{Arcsin}(x)}}{x}$$

Corrigé : On remarque que la fonction f est bien définie sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$ car sur cet intervalle, on a :

$$x \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Arcsin}(x) \geq 0$$

Pour $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, on a $\sqrt{x^2} = |x|$ donc $x = x\dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|}$. Ce qui donne :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x\mathrm{Arcsin}(x)}}{x} = \frac{|x|}{x}\frac{\sqrt{x\mathrm{Arcsin}(x)}}{\sqrt{x^2}} = \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{x}}$$

On a :

$$\frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{x} = \frac{\mathrm{Arcsin}(x) - \mathrm{Arcsin}(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{Arcsin}'(0) = 1$$

D'autre part, on sait que $\dfrac{|x|}{x}$ ne possède pas de limite en 0 car cette expression tend vers -1 à gauche et 1 à droite.

$$\boxed{f \text{ ne possède pas de limite en } 0}$$

4. Déterminer, si elle existe :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arctan}(x^2)}{\sin(3x)^2}$$

Corrigé : On va faire apparaitre les limites suivantes issues de taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(0)}{x - 0} = \mathrm{Arctan}'(0) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Ce qui donne pour $x \neq 0$:

$$\frac{\text{Arctan}(x^2)}{\sin(3x)^2} = \frac{\text{Arctan}(x^2)}{x^2} \times \frac{(3x)^2}{\sin(3x)^2} \times \frac{1}{9} = \frac{\text{Arctan}(x^2)}{x^2} \times \left(\frac{3x}{\sin(3x)}\right)^2 \times \frac{1}{9}$$

Sous cette forme-là, en utilisant les limites précédentes, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\text{Arctan}(x^2)}{\sin(3x)^2} = \frac{1}{9}}$$

5. Donner la forme exponentielle du produit de $1+i\sqrt{3}$ par $3+3i$.

Corrigé : On écrit chaque nombre complexe sous forme trigonométrique avant d'en faire le produit. On a :

$$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

Ce qui donne :

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

De même :

$$|3+3i| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$$

Ce qui donne :

$$3+3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

En faisant le produit, on obtient :

$$\boxed{(1+i\sqrt{3})(3+3i) = 6\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}}$$

6. Trouver tous les $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que :

$$\begin{cases} a+b = 2+i \\ ab = -13+13i \end{cases}$$

On pourra utiliser le fait que $48^2 + 55^2 = 73^2$.

Corrigé : On sait que a et b sont les solutions de l'équation de degré 2 suivante :

$$z^2 - (2+i)z - 13 + 13i = 0$$

Le discriminant de cette équation vaut :

$$\Delta = (2+i)^2 - 4(-13+13i) = 4+4i-1+52-52i = 55-48i$$

On cherche une racine carrée de Δ sous la forme $\delta = \alpha + i\beta$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On veut $(\alpha+i\beta)^2 = 55-48i$ en identifiant les parties réelles et imaginaires et en prenant le module de cette égalité, nous obtenons les trois relations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 & = & 55 & (1) \\ 2\alpha\beta & = & -48 & (2) \\ \alpha^2+\beta^2 & = & 73 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 & = & 64 & (1)+(3) \\ \alpha\beta & = & -24 & (2) \\ \beta^2 & = & 9 & (1)-(3) \end{cases}$$

On peut choisir $\alpha = 8$ et $\beta = -3$ par exemple et ainsi $\delta = 8 - 3i$ est une racine carrée de Δ. Les solutions de cette équations sont :

$$z_1 = \frac{(2+i)-\delta}{2} = \frac{2+i-8+3i}{2} = -3+2i$$
$$z_2 = \frac{(2+i)+\delta}{2} = \frac{2+i+8-3i}{2} = 5-i$$

L'ensemble des solutions du système de départ est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(-3+2i, 5-i), (5-i, -3+2i)\}}$$

7. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a > |b|$. En utilisant la règle de Bioche, calculer une primitive sur $]-\pi,\pi[$ de :

$$f : x \mapsto \frac{1}{a + b\cos(x)}$$

Corrigé : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$a + b\cos(x) \geq a - |b| > 0$$

Ainsi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\pi,\pi[$. Les premiers cas de la règle de Bioche ne s'appliquent pas, on pose donc $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$.

On comprend à ce moment là pourquoi nous avons restreint l'ensemble d'étude à $]-\pi,\pi[$.

On a $x = 2\text{Arctan}(t)$, ce qui donne $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$. D'autre part, d'après les formules de l'arc moitié, on sait que $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Il reste à utiliser tout cela :

$$\int \frac{dx}{a+b\cos(x)} = \int \frac{1}{a+b\frac{1-t^2}{1+t^2}} \times \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{a(1+t^2)+b(1-t^2)} = \int \frac{2dt}{(a-b)t^2+(a+b)} = \frac{2}{a+b}\int \frac{dt}{(\alpha t)^2+1}$$

avec $\alpha = \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$.

On reconnait la dérivée de Arctan à un coefficient près :

$$\int \frac{dx}{a+b\cos(x)} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t\right) = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Ceci en remarquant que la condition $a > |b|$ implique bien que $a^2 - b^2 > 0$ et $\dfrac{a-b}{a+b} > 0$.

Une primitive de f sur $]-\pi,\pi[$ est :

$$\boxed{F : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$$

8. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ (x^2+1)y' - 6xy = 2(x^2+1)^3$$

Corrigé : On résout l'équation différentielle sur $I = \mathbb{R}$. On commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$(EH) \ : \ y' - \frac{6x}{x^2+1} = 0$$

On pose $a : x \mapsto -\dfrac{6x}{x^2+1}$. Une primitive sur I de a est $A : x \mapsto -3\ln(x^2+1)$. On en déduit que les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$y_\lambda : x \mapsto \lambda e^{3\ln(x^2+1)} = \lambda(x^2+1)^3$$

Pour trouver une solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante en cherchant une solution particulière sous la forme $y_0 : x \mapsto \lambda(x)(x^2+1)^3$ avec λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, à déterminer. On a y_0 qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y_0' : x \mapsto \lambda'(x) + (x^2+1)^3 + \lambda(x)6x(x^2+1)^2$. Après calculs et en simplifiant, nous obtenons :

$$y_0 \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \ \lambda'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

On choisit $\lambda : x \mapsto 2\text{Arctan}(x)$, ce qui donne $y_0 : x \mapsto 2\text{Arctan}(x)(x^2+1)^3$. Il reste à faire la somme des solutions de l'équation homogène et des solutions particulières trouvées pour obtenir l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \{x \mapsto (x^2+1)^3(\lambda + 2\text{Arctan}(x)), \ \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

9. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ y'' - 2y' + y = \sin(2x)$$

Corrigé : On résout l'équation différentielle sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique est :

$$X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$$

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$y : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x \qquad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On passe en complexes en cherchant une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{2ix}$ puis on prendra la partie imaginaire de ces solutions. On remarque que $2i$ n'est pas une racine du polynôme caractéristique, ce qui nous permet de chercher une solution particulière sous la forme $y_0 : x \mapsto \alpha e^{2ix}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ à déterminer. On a :

$$y_0' : x \mapsto 2i\alpha e^{2ix}$$
$$y_0'' : x \mapsto -4\alpha e^{2ix}$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
y_0 \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow y_0'' - 2y_0' + y_0 = e^{2ix} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \ -4\alpha e^{2ix} - 2(2i\alpha e^{2ix}) + \alpha e^{2ix} = e^{2ix} \\
&\Leftrightarrow -3\alpha - 4i\alpha = 1 \\
&\Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{3+4i} = -\frac{3-4i}{25}
\end{aligned}$$

On a donc $y_0 : x \mapsto -\frac{3-4i}{25}e^{2ix} = -\frac{3-4i}{25}\Big(\cos(2x) + i\sin(2x)\Big)$. Il reste à prendre la partie imaginaire pour avoir une solution particulière de (E) :

$$x \mapsto -\frac{3}{25}\sin(2x) + \frac{4}{25}\cos(2x)$$

En sommant notre solution particulière et les solutions de l'équation homogène, nous obtenons l'ensemble des solutions :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x + -\frac{3}{25}\sin(2x) + \frac{4}{25}\cos(2x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\cos(t)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((2k-n)t)$$

Corrigé : On utilise la formule d'Euler :

$$\cos^n(t) = \Big(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\Big)^n$$

Puis la formule du binôme de Newton :

$$\cos^n(t) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikt}e^{-i(n-k)t} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)t} = \cos^n(t) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((2k-n)t)$$

La dernière étape se fait en prenant la partie réelle, ce qui ne change rien car $\cos^n(t)$ est un nombre réel.

$$\boxed{\cos(t)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((2k-n)t)}$$