L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, il vous est demandé de souligner les résultats obtenus. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note.

Exercice 1 : L'anneau $\mathbb{Z}[j]$

On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on considère l'ensemble :

$$\mathbb{Z}[j] = \{a + bj,\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. (a) Justifier que $1 + j + j^2 = 0$ et donner l'écriture algébrique de j.
   (b) Soit $z \in \mathbb{Z}[j]$, démontrer que z s'écrit de façon unique sous la forme $a + bj$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
2. Démontrer que $(\mathbb{Z}[j], +, \times)$ est un anneau commutatif où $+$ et $\times$ sont l'addition et la multiplication usuelles sur les nombres complexes.
3. Soit $z = a + bj$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On note $N(z) = |z|^2$.
   (a) Démontrer que $N(z) \in \mathbb{N}$.
   (b) Démontrer que z est un inversible de l'anneau $\mathbb{Z}[j]$ si et seulement si $N(z) = 1$.
   (c) En déduire les inversibles de $\mathbb{Z}[j]$. On donnera également leurs inverses respectifs.
   (d) L'anneau $\mathbb{Z}[j]$ est-il un corps ?

Exercice 2 : Triplets pythagoriciens

On dit que $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ est un triplet pythagoricien si et seulement si $x^2 + y^2 = z^2$. L'objectif de cet exercice est de déterminer tous les triplets pythagoriciens. On note dans tout cet exercice $x \wedge y = \text{pgcd}(x, y)$. Les diviseurs considérés dans ce problème sont des entiers naturels. Enfin, on dira que $a \in \mathbb{N}$ est un carré si et seulement si il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que $a = b^2$.

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ un diviseur commun à x, y et z, en factorisant par d montrer qu'il suffit de déterminer les triplets pythagoriciens qui n'ont pas d'autres diviseurs communs que 1.

   On dit alors que x, y et z sont premiers entre eux et on parle dans ce cas de triplet pythagoricien primitif. Dans toute la suite, on s'intéresse à un triplet pythagoricien primitif (x, y, z).

2. Montrer que $x \wedge y = x \wedge z = y \wedge z = 1$. En déduire que x et y ne sont pas tous les deux pairs.
3. A l'aide de congruences modulo 4, montrer que x et y ne sont pas tous les deux impairs.

   Les entiers naturels x et y sont de parités distinctes, sans perte de généralité on suppose dans toute la suite que x est pair et y impair.

4. Justifier qu'il existe $(u, v, w) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $x = 2u$, $z + y = 2v$ et $z - y = 2w$.
5. Montrer que $v \wedge w = 1$.
6. Montrer que vw est un carré, en déduire que v et w sont des carrés. On pose $v = n^2$ et $w = m^2$ où $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.
7. Montrer que $n > m$ et que $n \wedge m = 1$. Exprimer u en fonction de n et m.
8. En déduire que (x, y, z) est un triplet pythagoricien primitif si et seulement si il existe deux entiers n et m premiers entre eux et de parités distinctes avec $n > m > 0$ tels que $x = 2nm$, $y = n^2 - m^2$ et $z = n^2 + m^2$ ou $x = n^2 - m^2$, $y = 2nm$ et $z = n^2 + m^2$.

Problème : Une équation fonctionnelle

L'objectif de ce problème est de trouver toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(\mathcal{R}) : \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)+f(y) = 2f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)f\Big(\frac{x-y}{2}\Big)$$

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient la propriété $(\mathcal{R})$.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions **continues** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient la propriété $(\mathcal{R})$.
On pourra utiliser les deux formules suivantes valables pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Partie A : Généralités sur les fonctions de $\mathcal{E}$

1. Déterminer les fonctions constantes appartenant à $\mathcal{E}$.
2. $\mathcal{E}$ est-il un sous-groupe de $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+)$?
3. Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on introduit la propriété :

$$(\mathcal{S}) : \qquad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ f(u+v)+f(u-v) = 2f(u)f(v)$$

   Montrer que f vérifie $(\mathcal{S})$ si et seulement si f vérifie $(\mathcal{R})$.

   Dans la suite du devoir, on pourra utiliser indifféremment l'une ou l'autre de ces propriétés en précisant s'il s'agit de $(\mathcal{R})$ ou $(\mathcal{S})$ et avec quelles valeurs des paramètres on l'utilise. ***Désormais, et pour toute la suite du problème, on suppose que f n'est pas la fonction nulle.***

4. Soit $f \in \mathcal{E}$.
   (a) Montrer que $f(0) \neq 0$. En déduire que $f(0) = 1$.
   (b) Montrer que f est une fonction paire.
   (c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq -1$.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \mathrm{ch}(\lambda x)$ et $x \mapsto \cos(\lambda x)$ appartiennent à $\mathcal{C}$.
6. Le résultat de cette question n'intervient pas dans la suite du problème. On suppose, uniquement dans cette question, que f est une fonction dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. Soit u un réel fixé, on pose, pour tout v réel, $F(v) = f(u+v)+f(u-v)-2f(u)f(v)$.
   (a) Justifier que F est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$, calculer pour tout v réel $F'(v)$ et $F''(v)$. Dans la suite de la question, on suppose que $f \in \mathcal{E}$.
   (b) Déterminer une constante $k \in \mathbb{R}$, qui dépend de f mais pas de u, telle que : $\forall u \in \mathbb{R},\ f''(u) = kf(u)$.
   (c) En conclure que f est une solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} y'' = ky \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

   (d) En déduire l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables deux fois et appartenant à $\mathcal{E}$. On distinguera plusieurs cas selon le signe de k.

Partie B : Étude de l'ensemble $\mathcal{C}$

Le but de cette partie est de déterminer totalement l'ensemble $\mathcal{C}$.

1. Soit $f \in \mathcal{E}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = f(ka)$.
   (a) Montrer que pour tout : $k \in \mathbb{N}^*,\ u_{k+1} + u_{k-1} = 2u_1 u_k$.
   (b) On suppose que $u_1 = f(a) \in [-1, 1]$. Justifier l'existence d'un réel $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $u_1 = \cos(\alpha)$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \cos(k\alpha)$.
   (c) Justifier que si $u_1 \notin [-1, 1]$ alors $u_1 > 1$. Justifier l'existence de $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_1 = \mathrm{ch}(\beta)$. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une expression de u_k en fonction de β et k.
2. On suppose désormais que $f \in \mathcal{C}$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel $b > 0$ tel que : $\forall x \in [-b, b],\ f(x) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = f\left(\dfrac{b}{2^n}\right)$.
   (b) Montrer que (v_n) est convergente et préciser sa limite.
   (c) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + v_n}{2}}$.
   (d) On suppose que $v_0 = f(b) \in]0, 1]$, justifier l'existence d'un réel $\gamma \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $v_0 = \cos(\gamma)$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n = \cos\left(\dfrac{\gamma}{2^n}\right)$.
   (e) On suppose $v_0 = f(b) > 1$, justifier l'existence de $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $v_0 = \mathrm{ch}(\delta)$. Calculer v_n en fonction de δ et n.
   (f) On fixe $n \in \mathbb{N}$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f\left(k\dfrac{b}{2^n}\right)$. On distinguera deux cas selon la valeur de $f(b)$.
   (g) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n = \left\lfloor 2^n \dfrac{x}{b} \right\rfloor$.
      i. Montrer que $\left(\dfrac{b}{2^n} p_n\right)$ converge et préciser sa limite.
      ii. Justifier la convergence et exprimer la limite de la suite $\left(f\left(\dfrac{b}{2^n} p_n\right)\right)$.
      iii. En déduire la valeur de $f(x)$ en fonction de x, b et γ (ou δ selon le cas).
3. Décrire complètement l'ensemble $\mathcal{C}$.

Exercice 3 : Arithmétique de la suite de Fibonacci

On note (F_n) la suite de Fibonacci.

1. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
2. Démontrer que :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathrm{pgcd}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{pgcd}(m,n)}$$