L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, il vous est demandé de souligner les résultats obtenus. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note.

Problème : Gloire à l'arctangente

Le thème de ce problème est l'étude de la fonction arctangente ainsi que la preuve de formules la mettant en jeu. Les différentes parties sont dans une large mesure indépendantes.

A-Préliminaires

1. Justifier l'existence de la fonction arctangente, on pourra utiliser sans démonstration les propriétés de la fonction tangente.
2. Faire l'étude complète de la fonction arctangente. On donnera en justifiant : son ensemble de définition, son sens de variation, sa dérivée, ses limites, ses asymptotes, quelques valeurs remarquables et un tracé soigné.

B-Développement en série entière de la fonction Arctan

Le but de cette partie est de démontrer la formule :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}}$$

1. Soit q un nombre réel et n un entier naturel. En reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique, simplifier : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^k$.
2. Pour tout entier naturel n et tout réel $x \geq 0$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

   Calculer $S_n'(x)$ et en donner une expression simplifiée sans le signe Σ.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \geq 0$, on pose $R_n(x) = \operatorname{Arctan}(x) - S_n(x)$.
   (a) Calculer $R_n(0)$.
   (b) Établir les variations de la fonction R_n sur $\mathbb{R}_+$, on pourra distinguer les cas n pair et n impair.
   (c) Pour $x \geq 0$, comparer les nombres $S_n(x)$, $\operatorname{Arctan}(x)$ et $S_{n+1}(x)$ selon la parité de n.
   (d) En déduire que pour tout $x \geq 0$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$|\operatorname{Arctan}(x) - S_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

   On pourra pour cela commencer par calculer $S_{n+1}(x) - S_n(x)$.
4. (a) Démontrer la formule annoncée.
   (b) En déduire que $\pi = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 4 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

C-Les nombres de Fibonacci et l'arctangente

On rappelle (est-ce vraiment nécessaire ?) que la suite de Fibonacci, notée (F_n), est définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence l'identité de Cassini : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$.
2. En déduire que :
$$\forall n \geq 1,\ \operatorname{Arctan}\Big(\frac{1}{F_{2n}}\Big) = \operatorname{Arctan}\Big(\frac{1}{F_{2n+1}}\Big) + \operatorname{Arctan}\Big(\frac{1}{F_{2n+2}}\Big)$$
On pourra démontrer que les deux quantités mises en jeu ont la même tangente en justifiant avant tout que les membres de gauche et de droite sont compris dans l'intervalle $\Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big[$.
3. En déduire les formules suivantes :
   (a) $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{1}{2}\Big) + \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{1}{3}\Big)$.
   (b) $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{1}{2}\Big) + \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{1}{5}\Big) + \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{1}{8}\Big)$.
   (c) $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{1}{2}\Big) + \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{1}{5}\Big) + \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{1}{13}\Big) + \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{1}{21}\Big)$.
4. On considère la suite définie pour $n \geq 0$ par : $u_n = \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{1}{F_{2n+2}}\Big) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{1}{F_{2k+1}}\Big)$.
   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$. En déduire que (u_n) est constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$.
   (b) En déduire que :
$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\Big(\frac{1}{F_{2k+1}}\Big)$$

D-Entracte

Ces trois questions sont indépendantes.

1. (a) Montrer que :
$$\forall x \geq 0,\ x - \frac{1}{3}x^3 \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq x$$
   (b) En déduire : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\Big(\frac{k}{n^2}\Big)$.
2. Donner une primitive de la fonction Arctan.
3. On considère l'équation (E) : $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x^3) = \dfrac{3\pi}{4}$.
   (a) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution et que celle-ci est positive.
   (b) Justifier que cette solution vérifie la relation $\dfrac{x + x^3}{1 - x^4} = -1$.
   (c) En déduire l'expression de cette unique solution.

E-Simplification de Arctan(x) + Arctan(y)

Soient x et y deux réels, le but de cette partie est de simplifier l'expression $\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)$ et d'étudier quelques applications de ce résultat.

1. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $y=\dfrac{1}{x}$ avec x un réel non nul. On considère la fonction :

$$f\ :\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \text{Arctan}(x)+\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)\end{array}$$

   Démontrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \text{Arctan}(x)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \text{si}\quad x>0\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2} & \text{si}\quad x<0\end{cases}$$

2. Dans cette question, on considère $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $xy\neq 1$.
   (a) i. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(\text{Arctan}(x))=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
       ii. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}, \sin(\text{Arctan}(x))=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
   (b) Montrer que : $\cos(\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y))=\dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$.
   (c) En déduire que : $\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)\in\left]-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$.
   (d) Donner une simplification de $\tan(\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y))$.
   (e) On suppose $xy<1$, à l'aide de la question b) montrer que $\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. En déduire que :

$$\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)=\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

   (f) On suppose $xy>1$ et $x>0$, montrer que $\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$. En déduire que :

$$\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)=\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+\pi$$

   (g) Traiter pour finir le cas où $xy>1$ et $x<0$, en démontrant que :

$$\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)=\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)-\pi$$

3. Résumer tous les cas précédents en donnant une simplification de $\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)$ selon les valeurs de $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
4. (a) Etablir que $2\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{5}\right)=\text{Arctan}\left(\dfrac{5}{12}\right)$.
   (b) En déduire que $4\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{5}\right)=\text{Arctan}\left(\dfrac{120}{119}\right)$.
   (c) Démontrer la formule de Machin : $\dfrac{\pi}{4}=4\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{5}\right)-\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{239}\right)$.

F-Dérivons l'arctangente

Dans cette partie, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{Arctan}(x)$. On pourra utiliser sans justification particulière que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. **Lien entre les dérivées.**
   (a) Expliciter f', f'' et $f^{(3)}$ en simplifiant au maximum ces fonctions.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
      i. Justifier qu'il existe une fonction polynomiale que l'on note P_n telle que :
      $$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$
      ii. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.
      iii. Démontrer que P_n est de degré $n-1$ et que son coefficient dominant vaut $(-1)^{n-1}n!$.
   (c) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ (1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2x(n+1)f^{(n+1)}(x) + n(n+1)f^{(n)}(x) = 0$$
2. **Une formule pour $f^{(n)}$.**
   (a) Établir par récurrence que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos(f(x))^n \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
   (b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R},\ \cos(f(x)) > 0$.
   (c) Déterminer les zéros de $f^{(n)}$ pour $n \geq 2$.
3. **Passage en complexes.** Le but de cette question est de calculer une expression des dérivées successives de :
   $$\varphi : x \mapsto \frac{1}{x+a}$$
   avec $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ que l'on note $a = \alpha + i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
   On revient à la forme algébrique en posant $\varphi = u + iv$ où u et v sont deux fonctions à valeurs réelles.
   On rappelle que, par définition, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (respectivement dérivable n fois) si et seulement si u et v sont dérivables (respectivement dérivables n fois) sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = u'(x) + iv'(x) \ \ \text{(respectivement } \varphi^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x))$$
   (a) Démontrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable n fois pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en explicitant les parties réelles et imaginaires de φ.
   (b) En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R},\ (x+a)\varphi(x) = 1$, trouver deux relations liant u et v.
   (c) Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, établir les relations suivantes :
   $$\begin{cases} (x+\alpha)u^{(n)}(x) + nu^{(n-1)}(x) - \beta v^{(n)}(x) &= 0 \\ \beta u^{(n)}(x) + (x+\alpha)v^{(n)}(x) + nv^{(n-1)}(x) &= 0 \end{cases}$$
   (d) En déduire une relation entre $\varphi^{(n)}$ et $\varphi^{(n-1)}$ pour $n \geq 1$.
   (e) Démontrer finalement que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$
   (f) Démontrer qu'il existe $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{2b}\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x+b}\right)$$
   (g) En déduire une expression de $f^{(n)}$ pour $n \geq 1$.