

1. Quel est le module de $\frac{2-i}{2+i}$?
2. Représenter graphiquement les points M d'affixe z tels que :

$$1 < |z - 1 + i| \leq 3$$

3. Donner la forme algébrique de $e^{\ln(3)+i\frac{\pi}{3}}$.
4. Soit $z = \sin(\theta) + i \cos(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Le nombre complexe z est-il de module 1 ? Si oui, l'écrire sous forme exponentielle.
5. Vrai ou faux : $\mathbb{U}$ est stable par somme.
6. En utilisant la formule du binôme de Newton, simplifier $(1-i)^4$.
7. Soit ω un nombre complexe non nul. Trouver tous les complexes z tels que $e^z = \omega$.

1. Quel est le module de $\frac{2-i}{2+i}$?

Réponse : C'est un calcul direct :

$$\left| \frac{2-i}{2+i} \right| = \frac{|2-i|}{|2+i|} = \frac{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 1$$

2. Représenter graphiquement les points M d'affixe z tels que :
 $1 < |z - 1 + i| \leq 3$.

Réponse : Cette double inégalité se décompose ainsi :

$$|z - (1 - i)| > 1 \text{ et } |z - (1 - i)| \leq 3$$

Ainsi les points M correspondants se situent à l'extérieur du disque de centre $C(1 - i)$ de rayon 1 et à l'intérieur du disque de centre $C(1 - i)$ de rayon 3 (frontière comprise).

3. Donner la forme algébrique de $e^{\ln(3)+i\frac{\pi}{3}}$.

Réponse : Par définition :

$$e^{\ln(3)+i\frac{\pi}{3}} = e^{\ln(3)} e^{i\frac{\pi}{3}} = 3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

4. Soit $z = \sin(\theta) + i \cos(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Le nombre complexe z est-il de module 1 ? Si oui, l'écrire sous forme exponentielle.

Réponse : Le nombre complexe z est bien de module 1 car

$|z| = \sqrt{\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2} = 1$. On va transformer l'écriture du nombre complexe z pour le mettre sous forme exponentielle :

$$\begin{aligned} z &= \sin(\theta) + i \cos(\theta) \\ &= i(\cos(\theta) - i \sin(\theta)) \\ &= i(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \\ &= e^{\frac{i\pi}{2}} e^{-i\theta} \\ &= e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)} \end{aligned}$$

5. Vrai ou faux : $\mathbb{U}$ est stable par somme.

Réponse : C'est faux, la somme de deux nombres complexes de module 1 n'est pas forcément de module 1. Par exemple : $1 + 1 = 2$ n'est pas de module 1.

6. En utilisant la formule du binôme de Newton, simplifier $(1 - i)^4$.

Réponse : On utilise la formule du binôme de Newton pour développer :

$$(1 - i)^4 = 1 \times 1^4 + 4 \times 1^3 \times (-i) + 6 \times 1^2 \times (-i)^2 + 4 \times 1 \times (-i)^3 + 1 \times (-i)^4$$

Après simplifications cela donne : $(1 - i)^4 = -4$.

7. Soit ω un nombre complexe non nul. Trouver tous les complexes z tels que $e^z = \omega$.

Réponse : Notons $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$e^z = \omega \Leftrightarrow e^a e^{ib} = \omega$$

On en déduit que $|\omega| = e^a$ d'où $a = \ln(|\omega|)$ et $b = \arg(\omega) [2\pi]$.

Finalement :

$$z = \ln(|\omega|) + i(\arg(\omega) + 2k\pi)$$

où $k \in \mathbb{Z}$.