$\boxed{2}$ ♡ Montrer que $11|2^{123}+3^{121}$.

$\boxed{3}$ Trouver les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$10|n^2+(n+1)^2+(n+3)^2$$

$\boxed{5}$ ♡ Soient $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que :

$$7|x \text{ et } 7|y \Leftrightarrow 7|x^2+y^2$$

$\boxed{7}$ Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que le pgcd de $2n+4$ et $3n+3$ appartient à $\{1,2,3,6\}$.

$\boxed{11}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux. En déduire que $n+1 \Big| \binom{2n}{n}$.

$\boxed{13}$ Quel est l'intrus parmi les numéros d'exercices ?

$\boxed{17}$ ♡ Trouver tous les entiers naturels x et y qui vérifient :

$$\begin{cases} \text{pgcd}(x,y)=5 \\ \text{ppcm}(x,y)=60 \end{cases}$$

$\boxed{19}$ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(a_n,b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

b) En déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux.

$\boxed{23}$ Déterminer le pgcd et des coefficients de Bézout pour :

a) $a=33$ et $b=24$

b) $a=37$ et $b=27$

c) $a=270$ et $b=105$

$\boxed{29}$ ♡★ Soit $p>3$ un nombre premier. Montrer que :

$$24|p^2-1$$

$\boxed{31}$ ★ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}, n=m^2$$

$\boxed{37}$ ★ À l'aide de congruences, montrer que pour tout entier naturel n :

a) $7|3^{2n+1}+2^{n+2}$

b) $6|5n^3+n$

c) $5|2^{2n+1}+3^{2n+1}$

d) $9|4^n-1-3n$

$\boxed{41}$ ★ Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on note q le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b. Déterminer le quotient de la division euclidienne de ab^n-1 par b^{n+1} où $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{43}$ ★ Soient $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ solutions de $x^3+y^3=z^3$. Montrer que l'un des entiers x,y ou z est divisible par 3.

$\boxed{47}$ ★ Soient a et b premiers entre eux. Montrer que ab et $a+b$ sont premiers entre eux.

$\boxed{53}$ ♡★ Trouver tous les entiers x qui vérifient :

$$\begin{cases} x \equiv 2 \ [10] \\ x \equiv 5 \ [13] \end{cases}$$

$\boxed{59}$ ★ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a) $x-1|x+3$

b) $x+2|x^2+2$

c) $xy=3x+2y$

d) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$

$\boxed{61}$ ♡★ Soient $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ avec $ab \neq 0$ et $d=$pgcd(a,b). On note (E) l'équation : $ax+by=c$.

a) Montrer que (E) possède une solution si et seulement si $d|c$.

b) On note (x_0,y_0) une solution de (E). Donner toutes les solutions de (E) en fonction de x_0,y_0,a,b et d.

c) Application : de combien de façons peut-on obtenir 34 euros avec des pièces de 2 euros et des billets de 5 euros ?

$\boxed{67}$ ★★ On note Div(n) l'ensemble des diviseurs positifs d'un entier $n \in \mathbb{Z}$. Soient a et b premiers entre eux et :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \text{Div}(a) \times \text{Div}(b) & \to & \text{Div}(ab) \\ (k,l) & \mapsto & kl \end{array}$$

Montrer que φ est une bijection.

$\boxed{71}$ ★★ Montrer qu'il existe des plages arbitrairement grandes d'entiers consécutifs n'étant pas premiers.

$\boxed{73}$ ★★ Montrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$4n^3+6n^2+4n+1 \text{ est composé}$$

$\boxed{79}$ ★★ Soient a et p deux entiers supérieurs à 2. Montrer que si a^p-1 est premier, alors $a=2$ et p est premier.

$\boxed{83}$ ★★ Montrer que le nombre de diviseurs positifs de $n \in \mathbb{N}^*$ est impair si et seulement si n est un carré parfait.

$\boxed{89}$ ♡★★ (Petit théorème de Fermat). Soit p un nombre premier.

a) Montrer que si $1 \leq k \leq p-1$, alors $p \Big| \binom{p}{k}$.

b) Soit $n \geq 2$ un entier et $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{N}^n$. Montrer que l'entier A suivant est divisible par p :

$$A = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^p - \sum_{i=1}^{n} x_i^p$$

c) Montrer que si n est premier avec p, alors $n^{p-1} \equiv 1[p]$.

$\boxed{91}$ ★★★ Montrer que si $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus (a\mathbb{N}+b\mathbb{N}) \text{ fini}$$

Défis

D1 ★★ Soit $A \subset [\![1, 2n]\!]$ avec $\mathrm{Card}(A) = n+1$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(p, q) \in A^2$ avec $p \neq q$ tels que $p|q$.

D2 ★★ Par combien de 0 se termine $1000\,!$?

D3 ★★ Montrer que deux points du plan à coordonnées entières sont à des distances différentes du point $\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{3}\right)$.

D4 ★★ Trouver les trois derniers chiffres de 7^{9999}.

D5 ★★ Un nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ est divisible par tous les entiers de 2 à 31 (inclus) sauf par exactement 2 d'entre eux qui sont consécutifs. Quels sont ces deux entiers consécutifs ?

D6 ★★★ Existe-t-il un polynôme à coefficients entiers naturels non constant P tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \text{ soit premier}$$

D7 ★★★ Montrer que si n est un entier naturel supérieur à 2 alors $n^4 + 4^n$ n'est pas premier.

D8 ★★★★ Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$f : n \mapsto \left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

prend comme valeurs tous les entiers supérieurs à 2 sauf les carrés.

D9 ★★★★ Dans un pays lointain, une belle princesse a n prétendants. Ne sachant lequel choisir, elle les dispose en cercle et les numérote dans l'ordre de 1 à n. Elle exclut du cercle un prétendant sur deux en commençant par le numéro 2 (qui est donc le premier éliminé). Elle procède ainsi en poursuivant les tours de cercle jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un prétendant, qu'elle épouse. Comment prévoir le numéro de l'heureux élu ?