1-Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $f : x \mapsto x\sqrt{x}$.

2-Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sqrt{|x|}$.

3-Calculer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto e^x \cos(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4-Calculer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto \ln(1 + x)$ définie sur $]-1, +\infty[$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5-Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$.

1-Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $f : x \mapsto x\sqrt{x}$.

Réponse : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de deux fonctions qui sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Concentrons-nous sur l'étude en 0, pour $x \neq 0$, on a :

$$\frac{x\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \sqrt{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2-Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \sqrt{|x|}$.

Réponse : La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$. Étudions la dérivabilité en 0, pour $x > 0$, on a :

$$\frac{\sqrt{|x|} - 0}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

Ce qui permet d'affirmer que la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0 donc n'est pas dérivable en 0.

3-Calculer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto e^x \cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Réponse : La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f est la partie réelle de $g : x \mapsto e^{(1+i)x}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$g^{(n)} : x \mapsto (1+i)^n e^{(1+i)x} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n e^{(1+i)x} = 2^{\frac{n}{2}} e^{i(x+n\frac{\pi}{4})} e^x$$

En prenant la partie réelle, on en déduit que :

$$f^{(n)} : x \mapsto 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$$

4-Calculer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto \ln(1+x)$ définie sur $]-1,+\infty[$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Réponse : La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. On calcule les premières dérivées pour trouver une formule de récurrence.

$$f' : x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

$$f'' : x \mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(3)} : x \mapsto \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)} : x \mapsto -\frac{6}{(1+x)^4}$$

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{H}_n \ : \ f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

• La formule est vraie pour $n = 1$.

• On suppose que la formule est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$, on dérive pour obtenir :

$$f^{(n+1)} : x \mapsto -\frac{(-1)^{n-1}(n-1)! \times n}{(1+x)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Ce qui achève la récurrence et démontre la formule attendue.

5-Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$.

Réponse : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, étudions la dérivabilité en 0. Pour $x > 0$, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} = \frac{-2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{x}$$

En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\cos(2a) - 1 = -2\sin^2(a)$ utilisé ici avec $a = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

On transforme encore l'expression :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

car $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$.

On en déduit que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.