Colle 7 : Nombres complexes

1 ★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit ω une racine n-ième de l'unité, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$.

Corrigé : • Traitons tout d'abord le cas où $\omega = 1$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

• On suppose dans la suite $\omega \neq 1$. Notons $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$ et simplifions la quantité $(1-\omega)S$. On a :

$$(1-\omega)S = S - \omega S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \omega\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{k=1}^{n} kw^k$$

La plupart des termes peuvent se regrouper sauf ceux correspondant à $k = 0$ dans la première somme et à $k = n$ dans la seconde somme. Cela donne :

$$(1-\omega)S = 1 - n\omega^n + \sum_{k=1}^{n-1}\Big((k+1)\omega^k - k\omega^k\Big) = 1 - n + \sum_{k=1}^{n-1}\omega^k = -n + \sum_{k=0}^{n-1}\omega^k = -n$$

Au cours du calcul de la ligne précédente, nous avons utilisé le fait que $\omega^n = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0$.

Finalement $(1-\omega)S = -n$ donc $S = -\dfrac{n}{1-\omega}$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k = \begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2} & \text{si } \omega = 1 \\[2ex] -\dfrac{n}{1-\omega} & \text{si } \omega \neq 1 \end{cases}}$$

2 ★ Résoudre l'équation $|z+1| = |z| + 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Corrigé : Notons $z = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$|z+1| = |z| + 1 \Leftrightarrow \sqrt{(a+1)^2 + b^2} = \sqrt{a^2+b^2} + 1 \Leftrightarrow (a+1)^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2+b^2} + 1$$

On préserve bien l'équivalence en élevant au carré car les nombres mis en jeu sont positifs. On simplifie pour obtenir $a = \sqrt{a^2+b^2}$, c'est équivalent à $a \geq 0$ et $a^2 = a^2 + b^2$ d'où $b = 0$. Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}_+}$$

3 ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1|$.

Corrigé : On connait l'écriture explicite des éléments de $\mathbb{U}_n$, ce qui nous permet de réécrire la somme :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} |e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1|$$

Pour simplifier cette somme, nous pouvons utiliser la technique de l'angle moitié :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} |e^{\frac{ik\pi}{n}}(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{-ik\pi}{n}})| S = \sum_{k=0}^{n-1} |e^{\frac{ik\pi}{n}}| \times \left|2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| = \sum_{k=0}^{n-1} 2\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|$$

Ceci en utilisant le fait que $e^{\frac{ik\pi}{n}}$ et $i$sont de module 1. D'autre part, on a : $0 \leq k \leq n-1$ donc $0 \leq \dfrac{k\pi}{n} \leq \dfrac{(n-1)\pi}{n} < \pi$ donc $\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) \geq 0$ et on peut enlever la valeur absolue et on obtient :

$$S = 2\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

On retrouve alors un exercice connu, on remarque que S est égal au double de la partie imaginaire de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}$. Calculons cette dernière somme :

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{i\pi}{n}})^k = \frac{(e^{\frac{i\pi}{n}})^n - 1}{e^{\frac{i\pi}{n}} - 1} = \frac{-2}{e^{\frac{i\pi}{n}} - 1} = \frac{-2}{e^{\frac{i\pi}{2n}}(e^{\frac{i\pi}{2n}} - e^{\frac{-i\pi}{2n}})} = -2e^{-\frac{i\pi}{2n}} \frac{1}{2i\sin(\frac{\pi}{2n})} = i\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})}$$

La partie imaginaire de cette expression vaut $\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2n})}{\sin(\frac{\pi}{2n})} = \text{cotan}\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

Finalement, en multipliant par le facteur 2, il vient :

$$\boxed{\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1| = 2\text{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

4 ★ Déterminer le lieu des points M d'affixe z qui sont alignés avec les points I d'affixe i et M' d'affixe iz. Déterminer également le lieu des points M'.

Corrigé : • Remarquons tout d'abord que si $z = i$ alors les points M, I et M' sont alignés puisque M et I sont confondus. Dans la suite de l'étude prenons $z \neq i$.

On a :

$$M,\ I \text{ et } M' \text{ alignés} \Leftrightarrow \overline{MI} \text{ et } \overline{M'I} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \frac{i - iz}{i - z} \in \mathbb{R}$$

On pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\frac{i-iz}{i-z} = \frac{i - i(x+iy)}{i - x - iy} = \frac{y + i(1-x)}{-x + i(1-y)} = \frac{(y + i(1-x))(-x - i(1-y))}{(-x + i(1-y))(-x - i(1-y)} = \frac{-xy + (1-x)(1-y) + i(x(x-1) + y(y-1))}{x^2 + (1-y)^2}$$

Ce nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire : $-x + x^2 + y^2 - y = 0$. On peut reconnaitre l'équation d'un cercle puisque l'on peut réécrire :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|z - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right|^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|z - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On reconnait l'équation du cercle de centre Ω d'affixe $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\boxed{\text{Le lieu recherché est le cercle de centre } \Omega \text{ d'affixe } \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \text{ et de rayon } \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

• L'affixe de M' est l'image de l'affixe de M par la multiplication par i, géométriquement cela correspond à la rotation de centre l'origine du repère et d'angle $\frac{\pi}{2}$. L'image du cercle de centre Ω d'affixe $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5 ★ Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

Corrigé : L'idée va être de regrouper les cosinus et les sinus pour pouvoir utiliser l'exponentielle complexe. On a :

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k 1^{n-k} = (e^{i\theta}+1)^n$$

On reconnait une situation où il faut utiliser la technique de l'angle moitié :

$$C_n + iS_n = \left(e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{-i\theta}{2}})\right)^n = e^{\frac{in\theta}{2}} 2^n \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^n = 2^n \left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^n$$

On identifie les parties réelles et imaginaires pour obtenir :

$$\boxed{C_n = 2^n \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^n \text{ et } S_n = 2^n \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^n}$$

6 Donner la forme algébrique de $z = \frac{(1+j)^7}{j^5}$.

Corrigé : On a $1+j+j^2=0$ donc $1+j=-j^2$, d'autre part $j^3=1$. Ces deux remarques nous permettent de faire le calcul suivant :

$$z = \frac{(1+j)^7}{j^5} = \frac{(-j^2)^7}{j^3j^2} = \frac{(-j^2)^7}{j^3j^2} = -\frac{j^{14}}{j^2} = -j^{12} = -(j^3)^4 = -1$$

$$\boxed{z=-1}$$

$\boxed{7}$ ★ Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le module et un argument de $z = (1 + \cos(\beta) + i\sin(\beta))^n$.

Corrigé : En utilisant la technique de l'angle moité, on a :

$$z = (1 + \cos(\beta) + i\sin(\beta))^n = (1 + e^{i\beta})^n = \left(e^{i\frac{\beta}{2}}(e^{i\frac{\beta}{2}} + e^{-i\frac{\beta}{2}})\right)^n = e^{i\frac{n\beta}{2}} \times 2^n \times \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)^n$$

Trois cas peuvent se présenter :

- si $\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)^n = 0$ alors $z = 0$. Le module est nul et on ne peut pas donner un argument de 0.
- si $\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)^n > 0$ alors $|z| = 2^n \times \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)^n$ et $\frac{n\beta}{2}$ est un argument de z.
- si $\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)^n < 0$, on peut réécrire :

$$z = \left(-2^n \times \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)^n\right) \times \left(-e^{i\frac{n\beta}{2}}\right) = \underbrace{\left(-2^n \times \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)^n\right)}_{\geq 0} \times \left(e^{i\frac{n\beta}{2} + i\pi}\right)$$

Dans ce cas le module de z vaut $-2^n \times \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)^n$ et un argument de z est $\frac{n\beta}{2} + \pi$.

$\boxed{8}$ ★★ Soient a et b deux nombres complexes tels que $a\bar{b} \neq 1$. On pose $z = \frac{a-b}{1-a\bar{b}}$.

1. Démontrer que :
$$|z| = 1 \Leftrightarrow |a| = 1 \text{ ou } |b| = 1$$
2. De même, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $|z| < 1$.

Corrigé :

1. On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned}
|z| = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z\bar{z} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{a-b}{1-a\bar{b}} \times \frac{\bar{a}-\bar{b}}{1-\bar{a}b} \\
&\Leftrightarrow \quad (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = (1-a\bar{b})(1-\bar{a}b) \\
&\Leftrightarrow \quad a\bar{a} - a\bar{b} - b\bar{a} + b\bar{b} = 1 - a\bar{b} - b\bar{a} + a\bar{a}b\bar{b} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 + |a|^2|b|^2 - |a|^2 - |b|^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (|a|^2 - 1)(|b|^2 - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad |a| = 1 \text{ ou } |b| = 1
\end{aligned}$$

$\boxed{9}$ ★ Donner le module et argument des deux nombres complexes suivants où $n \in \mathbb{N}^*$:

$$z_1 = -\sin(2\theta) + 2i\cos(\theta)^2 \quad \text{et } z_2 = \left(\frac{3-i}{1-2i}\right)^n$$

Corrigé : • On a :

$$\begin{aligned}
z_1 &= -2\sin(\theta)\cos(\theta) + 2i\cos(\theta)^2 \\
&= 2\cos(\theta)(-\sin(\theta) + i\cos(\theta)) \\
&= 2\cos(\theta)\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= 2\cos(\theta)e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}
\end{aligned}$$

Ainsi le module de z_1 vaut $2|\cos(\theta)|$. Pour un argument, il y a 3 cas :

▶ si $\cos(\theta) = 0$, z_1 n' pas d'argument.

▶ si $\cos(\theta) > 0$, z_1 a pour argument $\theta + \dfrac{\pi}{2}$.

▶ si $\cos(\theta) < 0$, z_1 a pour argument $\theta + \dfrac{3\pi}{2}$.

• On a :

$$z_2 = \left(\frac{3-i}{1-2i}\right)^n = \left(\frac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}\right)^n = (1+i)^n = \sqrt{2}^n e^{in\frac{\pi}{4}}$$

Le module de z_2 vaut $2^{\frac{n}{2}}$, un argument de z_2 est $n\dfrac{\pi}{4}$.

$\boxed{10}$ ★ Résoudre l'équation suivante, sachant qu'elle possède une solution réelle :

$$iz^3 + (-1+2i)z^2 - (4+i)z + 3(-1+2i) = 0$$

Corrigé : Soit x réel, x est solution de l'équation si et seulement si :

$$ix^3 + (-1+2i)x^2 - (4+i)x + 3(-1+2i) = 0$$

Dans cette expression qui est égale à 0, les parties réelles et imaginaires sont nulles donc :

$$\begin{cases} -x^2 - 4x - 3 = 0 \\ x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0 \end{cases}$$

On résout sans problème la première équation qui a pour solutions -1 et -3. Par contre, seul -3 est solution de la seconde équation. On en déduit que $z = -3$ est l'une des solutions de l'équation de départ, ce qui nous permet de factoriser l'expression par $z+3$. Cela donne :

$$iz^3 + (-1+2i)z^2 - (4+i)z + 3(-1+2i) = 0 = (z+3)(iz^2 + (-1-i)z + (-1+2i))$$

On applique la méthode habituelle pour trouver les racines du polynôme de degré 2 restant, on obtient $1-2i$ et i. Les solutions de l'équation de départ sont -3, i et $1-2i$.

$\boxed{11}$ ★★ Dans le plan complexe, placer les points M d'affixe z tels que :

$$z^2 - (1+i)^2 = \bar{z}^2 - (1-i)^2$$

Corrigé : Notons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} z^2 - (1+i)^2 = \bar{z}^2 - (1-i)^2 &\Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 = (1+i)^2 - (1-i)^2 \\ &\Leftrightarrow (z+\bar{z})(z-\bar{z}) = 4i \\ &\Leftrightarrow 2x \times 2iy = 4i \\ &\Leftrightarrow xy = 1 \end{aligned}$$

L'ensemble recherché est la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ (une hyperbole).

12 ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver tous les nombres complexes z tels que $(\sqrt{3}+3i)z^n = -6$.

Corrigé : On transforme tout d'abord l'équation pour se ramener une forme $z^n = \omega$ que l'on sait résoudre à l'aide des racines n-ième de l'unité. On a :

$$(\sqrt{3}+3i)z^n = -6 \Leftrightarrow z^n = \frac{-6}{\sqrt{3}+3i} \Leftrightarrow z^n = -\frac{6(\sqrt{3}-3i)}{12} \Leftrightarrow z^n = -\frac{\sqrt{3}-3i}{2}$$

On doit ensuite écrire $-\frac{\sqrt{3}-3i}{2}$ sous forme exponentielle, ce qui donne en calculant le module qui vaut $\sqrt{3}$:

$$-\frac{\sqrt{3}-3i}{2} = \sqrt{3}\Big(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \sqrt{3}e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Il reste à résoudre l'équation en utilisant les racines n-ième de l'unité :

$$\begin{aligned} z^n = \sqrt{3}e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad & \Leftrightarrow \quad \Big(\frac{z}{3^{\frac{1}{2n}}e^{\frac{2i\pi}{3n}}}\Big)^n = 1 \\ & \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{3^{\frac{1}{2n}}e^{\frac{2i\pi}{3n}}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = 3^{\frac{1}{2n}}e^{\frac{2ik\pi}{n}+\frac{2i\pi}{3n}} \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \Big\{3^{\frac{1}{2n}}e^{2i\pi\frac{1+3k}{3n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\Big\}}$$

13 ★★ On définit le sinus d'un nombre complexe de la façon suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

Résoudre l'équation $\sin(z) = 2$.

Corrigé : On utilise la définition de l'énoncé, on résout l'équation par équivalences :

$$\begin{aligned} \sin(z) = 2 \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 2 \\ & \Leftrightarrow \quad e^{iz}-e^{-iz} = 4i \\ & \Leftrightarrow \quad X - \frac{1}{X} = 4i \text{ (en posant } X = e^{iz}) \\ & \Leftrightarrow \quad X^2 - 4iX - 1 = 0 \text{ (on sait résoudre cette équation, le discriminant vaut } -12) \\ & \Leftrightarrow \quad X = (2+\sqrt{3})i \text{ ou } X = (2-\sqrt{3})i \\ & \Leftrightarrow \quad e^{iz} = (2+\sqrt{3})i \text{ ou } e^{iz} = (2-\sqrt{3})i \end{aligned}$$

On sait résoudre l'équation $e^{iz} = (2+\sqrt{3})i$ puisque l'on a appris en cours à résoudre l'équation $e^z = \omega$ où $\omega \in \mathbb{C}^*$. On procède de même pour trouver :

$$iz = \ln(2+\sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2} + 2ik\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

De même pour l'équation $e^{iz} = (2-\sqrt{3})i$ qui nous donne :

$$iz = \ln(2-\sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2} + 2ik\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Il reste à diviser par i pour obtenir les solutions suivantes :

$$\boxed{\mathcal{S} = \Big\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2\pm\sqrt{3}),\ k \in \mathbb{Z}\Big\}}$$

> **14** ★★★ Simplifier le nombre complexe z suivant en l'écrivant sous forme exponentielle :
> $$z = \frac{1+\cos(a)+i\sin(a)}{\sqrt{1+\sin(2a)}+i\sqrt{1-\sin(2a)}} \qquad \text{avec } a \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$$

Corrigé : On commence par réécrire le numérateur avec la technique de l'angle moitié :

$$1+\cos(a)+i\sin(a) = 1+e^{ia} = 2e^{i\frac{a}{2}}\cos\left(\frac{a}{2}\right)$$

Pour le dénominateur, on utilise les formules $\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$ et $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\sin(2a)}+i\sqrt{1-\sin(2a)} &= \sqrt{\cos^2(a)+\sin^2(a)+2\sin(a)\cos(a)}+i\sqrt{\cos^2(a)+\sin^2(a)-2\sin(a)\cos(a)} \\
&= \sqrt{(\cos(a)+\sin(a))^2}+i\sqrt{(\cos(a)-\sin(a))^2} \\
&= |\cos(a)+\sin(a)|+i|\cos(a)-\sin(a)| \\
&= \cos(a)+\sin(a)+i(\cos(a)-\sin(a)) \\
&= \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(a)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(a)\Big)+i\sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(a)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(a)\Big) \\
&= \sqrt{2}\Big(\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\Big) \\
&= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}
\end{aligned}$$

Ce calcul a pu être fait en remarquant notamment que $\cos(a)+\sin(a)>0$ et $\cos(a)-\sin(a)>0$ car $a \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

On termine le calcul :

$$z = \frac{2e^{i\frac{a}{2}}\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\left(\frac{3a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

C'est la forme exponentielle recherchée car $\sqrt{2}\cos\left(\frac{a}{2}\right)>0$ puisque $a \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

$$\boxed{z = \sqrt{2}\cos\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\left(\frac{3a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}$$

> **15** ★. On se place dans le plan complexe et on considère les points A, B et C d'affixes respectives z, z^2 et z^3 avec $z \in \mathbb{C}$. Déterminer tous les nombres complexes z tels que ABC soit un triangle rectangle.

Corrigé : Il n'est pas précisé en quel point le triangle est rectangle, ce qui fait 3 cas à étudier. Avant tout remarquons que si $z=0$ ou $z=1$ alors les trois points sont confondus, ce qui nous donne un triangle rectangle particulier. Prenons dans toute la suite $z \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ ainsi les différents dénominateurs ne s'annuleront pas.

- Le triangle est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, ce qui se traduit par :

$$\frac{z^3-z}{z^2-z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z+1 \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = -1$$

L'image dans le plan complexe de cet ensemble de points est la droite d'équation $x=-1$.

- Le triangle est rectangle en B si et seulement si $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, ce qui se traduit par :

$$\frac{z^3-z^2}{z-z^2} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow -z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = 0$$

L'ensemble recherché est ici l'axe des imaginaires purs.

- Le triangle est rectangle en C si et seulement si $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux, ce qui se traduit par :

$$\frac{z-z^3}{z^2-z^3} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1+z}{z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{z} \in i\mathbb{R}$$

Posons $z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$1+\frac{1}{z} = 1+\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$$

Ce nombre est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire :

$$x^2+y^2+x=0$$

On transforme cette équation pour faire apparaitre l'équation d'un cercle :

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Il s'agit du cercle de centre $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

En conclusion, le lieu géométrique recherché est l'union des deux droites trouvées et du cercle.

$\boxed{16}$ ★★.

1. Donner une écriture exponentielle de z_1 et z_2.
2. Donner la forme algébrique et une forme exponentielle de $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Corrigé :

1. On a $|z_1| = \sqrt{(2\sqrt{6})^2+(2\sqrt{6})^2} = 4\sqrt{3}$ ainsi :

$$z_1 = 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

On a $|z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}$. Ce qui permet d'avoir :

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

En résumé :

$$\boxed{z_1 = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

2. D'une part, en utilisant les formes algébriques données dans l'énoncé, on a :

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{6}(1+i)}{\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})} = 2\sqrt{3}\frac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}((1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3}))$$

D'autre part, en utilisant la question précédente, on a :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

Finalement, on a :

$$\boxed{z = \frac{\sqrt{3}}{2}((1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})) = \sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{12}}}$$

3. Dans les deux écritures trouvées précédemment, on identifie les parties réelles et imaginaires :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{3}) = \sqrt{6}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{2}(1-\sqrt{3}) = \sqrt{6}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$

En simplifiant :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$