1-Vrai ou faux : une suite (u_n) converge si et seulement si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.

2-Démontrer qu'une suite réelle croissante qui admet une suite extraite majorée est convergente.

3-Trouver un exemple de suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 1$ avec pourtant (u_n^n) qui ne converge pas vers 0.

4-Soit (u_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. Traduire l'énoncé suivant :
$\forall \varepsilon > 0, \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n \geq N, \ |u_n - l| \leq \varepsilon$

5-Expliquer comment construire une suite réelle (u_n) telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une suite extraire de (u_n) qui tend vers k.

1-Vrai ou faux : une suite (u_n) converge si et seulement si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.

Réponse : C'est faux, il faudrait ajouter que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers la même limite. Par exemple avec $u_n = (-1)^n$, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes mais (u_n) ne converge pas.

2-Démontrer qu'une suite réelle croissante qui admet une suite extraite majorée est convergente.

Réponse : Notons $(u_{\varphi(n)})$ la suite extraite majorée par $M \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on sait que $\varphi(n) \geq n$, ainsi par croissance de (u_n), on a :

$$u_n \leq u_{\varphi(n)} \leq M$$

Ce qui démontre que la suite (u_n) est majorée par M et comme elle est croissante, elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

3-Trouver un exemple de suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 1$ avec pourtant (u_n^n) qui ne converge pas vers 0.

Réponse : On peut choisir $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ avec $n \geq 1$. On a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$$

Cependant, on sait que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

4-Soit (u_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. Traduire l'énoncé suivant :
$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |u_n - l| \leq \varepsilon$

Réponse : L'ensemble des entiers n vérifiant la propriété $|u_n - l| \leq \varepsilon$ n'est pas majoré puisque pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe un entier n dépassant N vérifiant la propriété.

Si l'ensemble de ces entiers n n'est pas majoré, c'est qu'il est infini.

En d'autres termes, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de termes de la suite (u_n) dans l'intervalle : $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. On peut ainsi créer une suite extraite de (u_n) qui tend vers l. Ceci puisque cette infinité de termes peut être rangée dans une suite extraite.

Cet énoncé signifie que l est une valeur d'adhérence de (u_n).

5-Expliquer comment construire une suite réelle (u_n) telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une suite extraire de (u_n) qui tend vers k.

Réponse : Il est difficile de donner une formule explicite mais voici les premiers termes de cette suite :

$$0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 5...$$

Chaque entier naturel, k, apparait une infinité de fois dans cette suite, ainsi il est possible de créer une suite extraite constante égale à k.