Exercice 1

1. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} P(z)=0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2i}\Big((z+i)^5-(z-i)^5\Big)=0 \\ &\Leftrightarrow (z+i)^5=(z-i)^5 \end{aligned}$$

- Si $z=i$, alors on obtient $(2i)^5=0$, donc i n'est pas solution de l'équation $P(z)=0$.
- Si $z \neq i$, on peut diviser par $z-i$ et on obtient :

$$\boxed{P(z)=0 \Leftrightarrow \frac{(z+i)^5}{(z-i)^5}=1}$$

(b) D'après la question précédente, les racines de P sont les nombres complexes z tels que $\dfrac{z+i}{z-i}$ soit une racine $5^{\text{ième}}$ de l'unité.
On résout l'équation suivante pour $k \in [\![0,4]\!]$:

$$\begin{aligned} \frac{z+i}{z-i}=e^{2i\frac{k\pi}{5}} &\Leftrightarrow z+i=e^{2i\frac{k\pi}{5}}(z-i) \\ &\Leftrightarrow z(1-e^{2i\frac{k\pi}{5}})=-i-ie^{2i\frac{k\pi}{5}} \end{aligned}$$

- Si $e^{2i\frac{k\pi}{5}}=1$, c'est-à-dire si $k=0$ alors l'équation devient $0=-2i$. Il faut donc exclure le cas $k=0$.
- Si $e^{2i\frac{k\pi}{5}} \neq 1$, c'est-à-dire si $k \in [\![1,4]\!]$ alors on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{z+i}{z-i}=e^{2i\frac{k\pi}{5}} &\Leftrightarrow z=\frac{-i-ie^{2i\frac{k\pi}{5}}}{1-e^{2i\frac{k\pi}{5}}} \\ &\Leftrightarrow z=-i\ \frac{1+e^{2i\frac{k\pi}{5}}}{1-e^{2i\frac{k\pi}{5}}} \qquad \text{on utilise la technique de l'angle moitié} \\ &\Leftrightarrow z=-i\ \frac{e^{i\frac{k\pi}{5}}(e^{-i\frac{k\pi}{5}}+e^{i\frac{k\pi}{5}})}{e^{i\frac{k\pi}{5}}(e^{-i\frac{k\pi}{5}}-e^{i\frac{k\pi}{5}})} \\ &\Leftrightarrow z=-i\ \frac{2\cos(\frac{k\pi}{5})}{-2i\sin(\frac{k\pi}{5})} \\ &\Leftrightarrow z=\frac{\cos(\frac{k\pi}{5})}{\sin(\frac{k\pi}{5})} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } P(z)=0 \text{ sont les nombres réels } \frac{\cos(\frac{k\pi}{5})}{\sin(\frac{k\pi}{5})} \text{ pour } k \in [\![1,4]\!]}$$

2. (a) On utilise la formule du binôme de Newton pour développer les puissances $5^{\text{ièmes}}$.

$$\begin{aligned}
P(z) &= \frac{1}{2i}\Big((z+i)^5-(z-i)^5\Big)\\
&= \frac{1}{2i}(z^5+5z^4i+10z^3i^2+10z^2i^3+5zi^4+i^5-(z^5+5z^4(-i)+10z^3(-i)^2+10z^2(-i)^3+5z(-i)^4+(-i)^5))\\
&= \frac{1}{2i}(z^5+5z^4i-10z^3-10z^2i+5z+i-(z^5-5z^4i-10z^3+10z^2i+5z-i))\\
&= \frac{1}{2i}(10z^4i-20z^2i+2i)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=5z^4-10z^2+1}$$

(b) On pose $Y=z^2$.

$$5z^4-10z^2+1=0 \Leftrightarrow 5Y^2-10Y+1=0$$

Le discriminant est $\Delta=100-4\times5=80$ et les deux solutions sont :

$$Y_1=\frac{10+\sqrt{80}}{10}=1+\frac{2\sqrt5}{5}\text{ et } Y_2=1-\frac{2\sqrt5}{5}$$

Ces deux nombres sont positifs. En effet, $2\sqrt5\leq5$ car $20\leq25$ donc $Y_2\geq0$.
Les racines de P sont :

$$\boxed{\pm\sqrt{1+\frac{2\sqrt5}{5}}\text{ et }\pm\sqrt{1-\frac{2\sqrt5}{5}}}$$

3. (a) Une rapide étude de fonction nous apprend que cotan est strictement décroissante sur $]0,\pi[$. De plus, $\text{cotant}\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ ainsi $\text{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right)>1$ car $\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\text{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right)>1}$$

(b) D'après la question 1.(b), les racines de P sont les $\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ pour $k\in[\![1,4]\!]$.

D'après la question 2.(b), les racines de P sont les nombres : $-\sqrt{1+\frac{2\sqrt5}{5}}$, $\sqrt{1+\frac{2\sqrt5}{5}}$, $-\sqrt{1-\frac{2\sqrt5}{5}}$ et $\sqrt{1-\frac{2\sqrt5}{5}}$.

On a clairement $-\sqrt{1+\frac{2\sqrt5}{5}}<0$ et $-\sqrt{1-\frac{2\sqrt5}{5}}<0$ et $1-\frac{2\sqrt5}{5}<1$ donc $\sqrt{1-\frac{2\sqrt5}{5}}<1$.
Par élimination, il vient que :

$$\boxed{\text{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{1+\frac{2\sqrt5}{5}}}$$

Exercice 2

1. D'après le cours, on sait que u est une racine 11-ième de l'unité, c'est-à-dire $u^{11} = 1$. On peut aussi faire un calcul direct :
$$u^{11} = (e^{\frac{2i\pi}{11}})^{11} = e^{2i\pi} = 1$$
$$\boxed{u^{11} = 1}$$
D'autre part, u est un nombre complexe de module 1 ainsi $\overline{u} = \dfrac{1}{u}$.
$$\boxed{\overline{u} = \frac{1}{u}}$$

2. En utilisant le fait que $\overline{u} = \dfrac{1}{u} = u^{-1}$, on a :
$$\overline{S} = \overline{u + u^3 + u^4 + u^5 + u^9} = \overline{u} + \overline{u^3} + \overline{u^4} + \overline{u^5} + \overline{u^9} = \overline{u} + \overline{u}^3 + \overline{u}^4 + \overline{u}^5 + \overline{u}^9 = u^{-1} + u^{-3} + u^{-4} + u^{-5} + u^{-9}$$
Or $u^{11} = 1$ donc $u^{10} = u^{-1}$, $u^8 = u^{-3}$, $u^7 = u^{-4}$, $u^6 = u^{-5}$ et $u^2 = u^{-9}$. On en déduit que :
$$\overline{S} = u^{10} + u^8 + u^7 + u^6 + u^2 = T$$
$$\boxed{S \text{ et } T \text{ sont conjugués}}$$

3. On applique la méthode vue en exercice et on utilise la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique :
$$1 + S + T = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + u^7 + u^8 + u^9 + u^{10} = \frac{u^{11} - 1}{u - 1} = 0$$
D'où $S + T = -1$.

D'autre part, si l'on effectue le produit, on a :
$$ST = (u + u^3 + u^4 + u^5 + u^9)(u^2 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{10}) =$$
$$u^3+u^7+u^8+u^9+u^{11}+u^5+u^9+u^{10}+u^{11}+u^{13}+u^6+u^{10}+u^{11}+u^{12}+u^{14}+u^7+u^{11}+u^{12}+u^{13}+u^{15}+u^{11}+u^{15}+u^{16}+u^{17}+u^{19}$$
On a : $u^{11} = 1$ donc $u^{12} = u$, $u^{13} = u^2$, $u^{14} = u^3$, $u^{15} = u^4$, $u^{16} = u^5$, $u^{17} = u^6$, $u^{18} = u^7$, $u^{19} = u^8$. Ce qui nous donne, en réorganisant les termes :
$$ST = 2(1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + u^7 + u^8 + u^9 + u^{10}) + 3 = 3$$
$$\boxed{S + T = -1 \text{ et } ST = 3}$$

4. D'après la question précédente, on sait que S et T sont solutions de l'équation : $z^2 + z + 3 = 0$. Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = -11$ et les deux solutions sont :
$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}$$

On remarque que, comme prévu à la question 2., les nombres complexes S et T sont conjugués.

Il reste à savoir lequel de ces complexes est S et lequel est T. Pour cela, on examine la partie imaginaire de S :

$$\mathrm{Im}(S) = \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{18\pi}{11}\right)$$

On remarque que $\sin\left(\frac{18\pi}{11}\right) = \sin\left(\pi + \frac{7\pi}{11}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{11}\right)$. En reprenant le calcul précédent, on a :

$$\mathrm{Im}(S) = \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{11}\right)\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\sin\left(\frac{8\pi}{11}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\sin\left(\frac{10\pi}{11}\right)}_{\geq 0}$$

En effet, $\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) \geq \sin\left(\frac{7\pi}{11}\right)$ car la fonction sinus est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
On vient de démontrer que la partie imaginaire de S est positive, finalement :

$$\boxed{S = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2} \text{ et } T = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}}$$

5. (a) On utilise les formules d'Euler pour obtenir :

$$i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = i\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)} = i\frac{\frac{e^{\frac{3i\pi}{11}} - e^{-\frac{3i\pi}{11}}}{2i}}{\frac{e^{\frac{3i\pi}{11}} + e^{-\frac{3i\pi}{11}}}{2}} = \frac{e^{\frac{3i\pi}{11}} - e^{-\frac{3i\pi}{11}}}{e^{\frac{3i\pi}{11}} + e^{\frac{3i\pi}{11}}} = \frac{e^{\frac{6i\pi}{11}} - 1}{e^{\frac{6i\pi}{11}} + 1} = \frac{u^3 - 1}{u^3 + 1}$$

D'autre part, en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-u^3 \neq 1$, on a :

$$-\sum_{k=1}^{10}(-u^3)^k = -(-u^3)\frac{(-u^3)^{10} - 1}{(-u^3) - 1} = u^3\frac{u^{30} - 1}{-u^3 - 1} = \frac{u^{33} - u^3}{-u^3 - 1} = \frac{1 - u^3}{-u^3 - 1} = \frac{u^3 - 1}{u^3 + 1}$$

Au cours de ce calcul, on a utilisé la relation $u^{33} = (u^{11})^3 = 1^3 = 1$. On a bien le résultat souhaité :

$$\boxed{i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{u^3 - 1}{u^3 + 1} = -\sum_{k=1}^{10}(-u^3)^k}$$

(b) On utilise à nouveau la formule d'Euler et la relation $e^{-\frac{2i\pi}{11}} = e^{-\frac{2i\pi}{11} + 2i\pi} = e^{\frac{20i\pi}{11}} = u^{10}$, cela nous donne :

$$4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = 4i\frac{e^{\frac{2i\pi}{11}} - e^{-\frac{2i\pi}{11}}}{2i} = 2(e^{\frac{2i\pi}{11}} - e^{-\frac{2i\pi}{11}}) = 2(u - u^{10})$$

$$\boxed{4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = 2(u - u^{10})}$$

(c) En utilisant les questions (a) et (b), on a :

$$i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = -\sum_{k=1}^{10}(-u^3)^k + 2(u - u^{10})$$

On peut détailler la somme en utilisant la relation $u^{11} = 1$, on obtient :

$$u^3 - u^6 + u^9 - u^{12} + u^{15} - u^{18} + u^{21} - u^{24} + u^{27} - u^{30} + 2u - 2u^{10} = u^3 - u^6 + u^9 - u + u^4 - u^7 + u^{10} - u^2 + u^5 - u^8 + 2u - 2u^{10}$$

On regroupe les termes pour obtenir :

$$i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)+4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)=u+u^3+u^4+u^5+u^9-(u^2+u^6+u^7+u^8+u^{10})=S-T$$

On multiplie par $-i$ pour obtenir :

$$\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)+4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)=i(T-S)$$

À l'aide des formules trouvées à la question 4., on obtient bien $i(T-S)=\sqrt{11}$. Finalement :

$$\boxed{\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)+4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)=i(T-S)=\sqrt{11}}$$