Problème 1

L'objectif de ce problème est d'étudier la densité de certaines suites.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. On appelle partie décimale de x le réel défini par :

$$M(x) = x - \lfloor x \rfloor$$

Sauf mention contraire, les suites considérées commencent à l'indice $n = 0$, ainsi on notera (u_n) au lieu de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Soit (u_n) une suite d'éléments de l'intervalle $[0,1[$, on dit que la suite (u_n) est dense dans $[0,1[$ si elle visite tout intervalle non trivial de $[0,1[$, c'est-à-dire :

$$\forall (a,b) \in [0,1[^2 \text{ tels que } 0 \leq a < b < 1,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ u_{n_0} \in [a,b]$$

Dans la partie C concernant la suite $(\cos(n))$, on adaptera la définition de densité présentée ci-dessus en remplaçant l'intervalle $[0,1[$ par l'intervalle $[-1,1]$.

On rappelle que π est irrationnel et on pourra utiliser ce résultat sans justification.

Les différentes parties sont dans une large mesure indépendantes, cependant la caractérisation des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ obtenue à la question 6 de la partie B sera utilisée dans la partie C.

A-Premiers exemples

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $M(x) \in [0,1[$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = M(nx)$.
   (a) On suppose que $x \in \mathbb{Z}$, que dire de la suite (u_n) ?
   (b) Dans cette question, on prend $x \in \mathbb{Q}$.
      i. Soit $x = \dfrac{2}{5}$, décrire le comportement de la suite (u_n). On commencera par donner les 12 premiers termes de la suite.
      ii. On pose $x = \dfrac{p}{q}$ où $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Démontrer que (u_n) est une suite périodique de période q.
      iii. En déduire que (u_n) n'est pas dense dans $[0,1[$.
3. On dit qu'une suite réelle positive (a_n) est à croissance lente si et seulement si (a_n) est croissante, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.
   (a) Les suites suivantes sont-elles à croissance lente ? On justifiera dans chaque cas la réponse.
      i. (n^2).
      ii. $(\sqrt{n})$.
      iii. $(\ln(n))_{n\geq 1}$.
   (b) Soit (a_n) une suite réelle positive à croissance lente. On se donne $(a,b) \in [0,1[^2$ tels que $0 \leq a < b < 1$ et on note $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$.
      i. Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ |a_{n+1} - a_n| \leq \varepsilon$.
      ii. On pose $A = \lfloor a_N \rfloor + 1$. Justifier qu'il existe $N' \geq N$ tel que $a_{N'} \geq A + 1$.
      iii. Démontrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} \in [A+a, A+b]$. On pourra représenter $a_N,\ a_{N'}$ et l'intervalle $[A+a, A+b]$ sur l'axe réel et remarquer que l'intervalle $[A+a, A+b]$ est de longueur 2ε.
      iv. En déduire que $(M(a_n))$ est dense dans $[0,1[$.
      v. En déduire deux exemples de suites denses dans l'intervalle $[0,1[$.

B-Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

On appelle sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ un sous-groupe de $\mathbb{R}$ pour la loi + (l'addition usuelle sur les réels). Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. On rappelle également qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dite dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tous $c < d$ des réels, il existe $x \in A$ tel que $c \leq x \leq d$.

1. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ de cette forme sont appelés monogènes.
2. Montrer que $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe additif dense dans $\mathbb{R}$.
3. Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$.
   (a) Justifier que $H \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide, en déduire que $H \cap \mathbb{R}_+^*$ possède une borne inférieure notée a dans toute la suite.
   (b) Démontrer que $a \geq 0$.
4. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
   (a) Justifier que $2a$ n'est pas un minorant de $H \cap \mathbb{R}_+^*$. En déduire qu'il existe $x_1 \in H$ tel que $a \leq x_1 < 2a$.
   (b) Montrer que si $x_1 > a$, alors il existe $x_2 \in H$ tel que $a \leq x_2 < x_1 < 2a$.
   (c) En examinant $x_1 - x_2$, démontrer que $x_1 > a$ est absurde. En déduire que $a \in H$.
   (d) Démontrer que $a\mathbb{Z} \subset H$.
   (e) Soit $x \in H$, montrer que : $x - \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor a \in [0, a[$. En déduire que $x \in a\mathbb{Z}$.
   (f) Conclure que $H = a\mathbb{Z}$.
5. On suppose ici que $a = 0$. On considère également $c < d$ des réels.
   (a) Montrer qu'il existe $x \in H$ tel que $0 < x < d - c$.
   (b) En déduire que $[c, d] \cap H \neq \emptyset$.
6. En déduire qu'un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est monogène ou dense dans $\mathbb{R}$.

C-Application à l'étude de la suite $(\cos(n))$

1. Dans cette question, on démontre que la suite de terme général $u_n = \cos(n)$ diverge. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.
   (a) Justifier que : $\forall n \geq 1,\ u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n \cos(1)$.
   (b) En déduire que $l = 0$.
   (c) Justifier que : $\forall n \geq 0,\ u_{2n} = 2u_n^2 - 1$.
   (d) En déduire que la suite (u_n) diverge.
2. On pose $Y = \{\cos(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ et nous allons démontrer que Y est dense dans $[-1, 1]$.
   (a) On note $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \{p + 2\pi q,\ (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$. Démontrer que c'est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
   (b) Démontrer que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ ne peut s'écrire $\alpha\mathbb{Z}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. En déduire que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que si $x \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\cos(x) \in Y$.
   (d) En déduire que Y est dense dans $[-1, 1]$.
3. Soit $l \in [-1, 1]$, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left[l - \frac{1}{n}, l + \frac{1}{n}\right] \cap Y$ est un ensemble infini. En déduire qu'il existe une extractrice φ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos(\varphi(n)) = l$.

D-Etude de la suite $(M(nx))$

Cette partie reprend l'étude de la suite $(M(nx))$ avec $x \in \mathbb{R}$ commencée dans la question 2 de la partie A. On suppose ici que x est irrationnel.

1. Démontrer que $\mathbb{Z} + x\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. En déduire que la suite $(M(nx))$ est dense dans $[0, 1[$.

   On a ainsi démontré que la suite $(M(nx))$ est dense dans $[0, 1[$ si et seulement si x est irrationnel.

3. Une application.
   (a) Démontrer que $\log(2)$ est irrationnel où log désigne le logarithme en base 10.
   (b) En déduire que quelque soit la séquence de chiffres considérée, il existe une puissance de 2 dont l'écriture en base 10 a pour premiers chiffres cette séquence.

E-Nombre d'or et nombres de Pisot

Soit un réel $x > 1$. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = x^n - \lfloor x^n \rfloor$. Nous allons voir qu'il est possible que x soit irrationnel sans que (v_n) soit dense dans $[0, 1[$. Soit $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n + \dfrac{1}{(-\varphi)^n}$ est un entier naturel. On pourra effectuer, par exemple, une récurrence double sur n.
2. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(-\varphi)^n} = 0$.
3. En déduire que si $x = \varphi$ alors la suite (v_n) n'est pas dense dans $[0, 1[$.

Problème 2

Dans tout l'exercice $(A, +, \times)$ désigne un anneau **commutatif** non nul. On note 0 et 1 les éléments neutres respectifs de l'addition et de la multiplication. Pour tous $(x, y) \in A^2$, on s'autorise à noter xy au lieu de $x \times y$. On dit qu'une partie, I, de A est un **idéal** de A si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

i) $0 \in I$
ii) $\forall (x, y) \in I^2,\ x + y \in I$
iii) $\forall \lambda \in A,\ \forall x \in I,\ \lambda x \in I$

1. **Un exemple.** On se place dans l'anneau $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication usuelles sur les fonctions. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I_a = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f(a) = 0\}$$

Démontrer que I_a est un idéal de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. **Idéaux de** $\mathbb{Z}$. Dans cette question, on considère l'anneau $\mathbb{Z}$ muni de l'addition et la multiplication usuelles.
   (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$, démontrer que $n\mathbb{Z} = \{nk,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.
   (b) Soit I un idéal de $\mathbb{Z}$. On suppose que $I \neq \{0\}$.
      i. Justifier que $n = \min(I \cap \mathbb{N}^*)$ existe.
      ii. Soit $a \in I$, démontrer que le reste de la division euclidienne de a par n est nul. En déduire que $I \subset n\mathbb{Z}$.
      iii. Réciproquement démontrer que $n\mathbb{Z} \subset I$.
   (c) Caractériser les idéaux de $\mathbb{Z}$.

3. **Idéaux et éléments inversibles.** Démontrer que si I est un idéal de A alors :

$$I \text{ contient un élément inversible } \Leftrightarrow I = A$$

4. **Idéaux et morphismes.** Soit $f : A \to \widehat{A}$ un morphisme d'anneaux, avec $\widehat{A}$ un anneau également commutatif et non nul.
   (a) Soit J un idéal de $\widehat{A}$, démontrer que $f^{-1}(J)$ est un idéal de A.
   (b) Trouver un exemple montrant que si I est un idéal de A, $f(I)$ n'est pas toujours un idéal de $\widehat{A}$.

5. **Radical d'un idéal.** Soit I un idéal de A. On appelle radical de I et on note $\sqrt{I}$ l'ensemble :

$$\sqrt{I} = \{x \in A,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \in I\}$$

   (a) Démontrer que $I \subset \sqrt{I}$.
   (b) Démontrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A. On pensera à utiliser la formule du binôme de Newton.
   (c) Vérifier que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
   (d) Dans cette question $A = \mathbb{Z}$. Déterminer l'ensemble des entiers naturels $m \in \mathbb{Z}$ tels que $\sqrt{m\mathbb{Z}} = m\mathbb{Z}$.

6. **Idéaux premiers**. On dit qu'un idéal I est premier si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in A^2,\ xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I$$

   (a) Donner un idéal premier de $\mathbb{Z}$.
   (b) On suppose que tous les idéaux de A sont premiers. Démontrer que A est intègre puis que A est un corps.