Généralités sur les fonctions

1 Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto \ln(2-x)$

b) $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

c) $h : x \mapsto \dfrac{\ln(\sqrt{3x+7})}{4-x^2}$

d) $i : x \mapsto \sqrt{\ln(\ln(\ln(x)))}$

2 ♡★ Soit f une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Montrer que f est l'identité.

3 ♡★ On pose $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Montrer que la fonction f est impaire.

4 ★ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ strictement décroissante.
Montrer que f est strictement décroissante.

5 ♡★ Montrer que l'application suivante est bijective et exprimer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1-x^2} \end{array}$$

6 ★ Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ monotones et périodiques.

7 ★★ On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x - 8$.

a) Montrer que f est strictement croissante et bijective. En déduire que f^{-1} existe.

b) Trouver tous les réels x vérifiant :

$$2f(x) + 3f^{-1}(x) = 10$$

Équations et inéquations

8 ★ Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{4x-1}{2x+1} \geq 1$ b) $|x-2| > 2x-1$

9 ♡★ Résoudre les équations suivantes :

a) $2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 2 = 0$

b) $4x + 6\sqrt{x} - 18 = 0$

c) $\sqrt{x+7} = 5 - x$

d) $4x - 3 = |x^2 - 1|$

e) $|x+1| + |2x+1| = 4$

f) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$

10 ★ Démontrer les inégalités suivantes :

a) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ab \leq \dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$

b) $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ ab+bc+ac \leq a^2+b^2+c^2$

c) $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \dfrac{1}{2}\Big(\ln(a)+\ln(b)\Big) \leq \ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

d) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^4 \leq 8(a^4+b^4)$

e) $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ (a+b+c)^2 \leq 4a^2+4b^2+2c^2$

11 ★★ Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a) $x^3 + x^2 + x = -\dfrac{1}{3}$

b) $\sqrt{6-x} + \sqrt{3-x} = \sqrt{x+5} + \sqrt{4-3x}$

c) $4\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[4]{x} = 9$

d) $x^6 + x^4 = 810$

e) $(x-7)(x-5)(x+4)(x+6) = 608$

12 ★★ Soient $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, démontrer que :

$$\Big||x|-|y|\Big| \leq |x+z| + |y+z|$$

13 ♡★★ Soient a et b deux réels.

a) Démontrer que $\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|} \geq \sqrt{|a|+|b|}$.

b) En déduire que $\sqrt{|a-b|} \geq \Big|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\Big|$.

Dérivation

14 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$.

15 Soit $m \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de la fonction :

$$f_m : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+m}{x^2+1} \end{array}$$

a) Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse 0 sont parallèles.

b) Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse 1 sont concourantes.

16 Combien la fonction polynomiale $f : x \mapsto x^5 - 5x + 2$ a-t-elle de zéros réels ?

17 ♡★ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

18 ★ Quel nombre réel est le plus grand entre e^π et π^e ?

19 ★★ Soit $f : x \mapsto e^x \sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$$

20 ★★ Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+x^2} \geq 2$$

Étude de fonctions

21 Étude de $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$.

22 On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-2\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2-x-5}{x+2} \end{array}$$

a) Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\},\ f(x) = ax+b+\frac{c}{x+2}$$

b) Déterminer les asymptotes à la courbe de f.

23 ★ On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2-1}+2x \end{array}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition, noté D, de f.

b) Etudier les asymptotes à la courbe de f.

24 ♡★ Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2}+x)$$

a) Déterminer le domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}$.

b) Démontrer que f est impaire.

c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

d) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

e) En déduire que f est une bijection de $\mathcal{D}$ sur un ensemble à déterminer.

f) Donner le sens de variation de f^{-1}, ainsi que son domaine de dérivabilité.

g) Déterminer l'expression de f^{-1}.

25 ★ On pose $f : x \mapsto x^2+\ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble à préciser.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable et exprimer $(f^{-1})'$ en fonction de f^{-1}.

Défis

D1 ★★★ La fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x-3)f(x+3)$$

Montrer que f est périodique.

D2 ★★★ a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ (n-1)x+\frac{y^n}{x^{n-1}} \geq ny$$

b) Montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \sqrt[n]{x_1...x_n} \leq \frac{x_1+...+x_n}{n}$$

D3 ★★★ Montrer que si l'on considère 3 réels positifs a, b et c alors au moins l'un des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

D4 ★★★ Montrer qu'il est impossible de trouver deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\circ g(x) = x^2 \text{ et } g\circ f(x) = x^3$$