Le but de cet exercice est d'étudier la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire.** On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)$$

   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner l'expression de la dérivée de g sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Faire l'étude du sens de variation de g sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) Montrer qu'il existe dans l'intervalle $\left[\sqrt{e-1}, \sqrt{e^2-1}\right]$ un unique réel, que l'on notera α, vérifiant $g(\alpha) = 0$.

   On ne cherchera pas à expliciter α.

   (d) En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}_+$.

2. **Étude de la fonction f.**

   (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ possède une limite en 0 et donner cette limite. En déduire que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

   (b) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $f'(x)$ sous la forme d'une fraction dont le numérateur est $g(x)$. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) Montrer que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $f(x) \leq \dfrac{\ln(2x^2)}{x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

   (d) Tracer le graphe de la fonction f.