Problème

Dans ce problème, les solutions des équations différentielles proposées seront à valeurs réelles et I désigne un intervalle réel. On étudie l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ (x^2-x)y''+(x+1)y'-y=u(x)$$

où u est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. On note $(\mathcal{H})$ l'équation homogène associée à (E).

On note $I_1=]-\infty,0[$, $I_2=]0,1[$, $I_3=]1,+\infty[$, $J_1=]-\infty,-1[$ et $J_2=]-1,0[$.

A-Préliminaires

Les questions de cette partie sont indépendantes et serviront dans la suite du problème.

1. Expliquer pourquoi l'équation différentielle (E) ne rentre pas dans le cadre du cours.
2. Soient $(a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{R}^6$.
   (a) À quelle condition sur a et b, l'équation $ax+by=e$ est-elle l'équation d'une droite du plan ? Dans ce cas, donner un vecteur directeur de cette droite.
   (b) On considère le système $(\mathcal{S})$ suivant :
   $$(\mathcal{S})\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & e\\ cx+dy & = & f\end{array}\right.$$
   Démontrer que $(\mathcal{S})$ admet une unique solution si et seulement si $ad-bc\neq 0$.
3. Trouver des réels $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que :
   $$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\},\ \frac{3x^2+1}{x^3-x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$$

B-Résolution de $(\mathcal{H})$

Dans cette partie, on cherche à résoudre $(\mathcal{H})$ sur différents intervalles.

1. Vérifier que $f_0 : x\mapsto x+1$ est solution de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}$.
2. On cherche à résoudre $(\mathcal{H})$ sur I qui est l'un des intervalles I_2, I_3, J_1 ou J_2. Pour cela, on pose :
   $$f\ :\ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & C(x)f_0(x)=C(x)(x+1)\end{array}$$
   où C est une fonction dérivable deux fois sur I.
   (a) Montrer que f est solution de $(\mathcal{H})$ sur I si et seulement si C' est solution sur I d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, $(\mathcal{H}')$, que l'on explicitera.
   (b) Résoudre $(\mathcal{H}')$ sur I.
   (c) En déduire que les solutions de $(\mathcal{H})$ sur I s'écrivent $x\mapsto \dfrac{\lambda}{x-1}+\mu(x+1)$ où $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

(d) À l'aide des solutions de $(\mathcal{H})$ sur J_1 et J_2, démontrer que toutes les solutions de $(\mathcal{H})$ sur I_1 sont de la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x-1} + \mu(x+1)$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Lors de la partie analyse, on étudiera la continuité en -1 puis la continuité de la dérivée en -1, on ne cherchera pas à donner $f(-1)$ et $f'(-1)$ qui ne s'obtiennent pas directement.

(e) Démontrer que les solutions de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \mapsto \mu(x+1)$ où $\mu \in \mathbb{R}$.

C-Problème de Cauchy pour $(\mathcal{H})$

1. On se place sur un intervalle I qui est égal à I_1, I_2 ou I_3. Montrer qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy suivant :
$$(\mathcal{P}) \ : \ \begin{cases} (x^2-x)y'' + (x+1)y' - y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$
avec $x_0 \in I$ et $(y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2$. On pourra utiliser la forme des solutions de $(\mathcal{H})$ sur I trouvée dans la question 2. de la partie B.
2. On se place sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$, trouver des valeurs de x_0, y_0 et y'_0 afin que le problème $(\mathcal{P})$ n'ait aucune solution.
3. Toujours en prenant $I = \mathbb{R}$ est-il possible de choisir x_0, y_0 et y'_0 afin que $(\mathcal{P})$ possède plusieurs solutions ?

D-Résolution de (E)

Dans cette partie, on se place sur l'intervalle I qui est égal à I_1, I_2 ou I_3.

1. On suppose disposer d'une solution particulière de (E) sur I notée φ_0. Démontrer que les solutions de (E) sont de la forme :
$$x \mapsto \varphi_0(x) + \frac{\lambda}{x-1} + \mu(x+1)$$
2. Dans cette question uniquement, on suppose que u est la fonction définie sur I par $u : x \mapsto 1$. Résoudre (E) sur I, puis résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
3. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme :
$$g \ : \ \begin{array}{ccl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\lambda(x)}{x-1} + \mu(x)(x+1) \end{array}$$
avec λ et μ deux fonctions dérivables deux fois sur I. On impose de plus que :
$$\forall x \in I, \ \frac{\lambda'(x)}{x-1} + \mu'(x)(x+1) = 0$$
   (a) Montrer que g est solution de (E) sur I si et seulement si λ', μ' et u sont liées par une relation que l'on précisera.
   (b) En déduire que g est solution de (E) sur I si et seulement si λ et μ sont des primitives sur I de fonctions que l'on précisera.
4. Dans cette question, on suppose que u est définie sur I par $u : x \mapsto x$. Résoudre (E) sur I.