Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \ln(x^2 - 2x + 3)$.

1. Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle à préciser.
3. Expliciter la bijection réciproque de f restreinte à $[1, +\infty[$. On s'autorisera à noter f^{-1} cette bijection réciproque.
4. Donner l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée de f^{-1} de deux façons différentes : en utilisant la formule donnant la dérivée d'une réciproque et en utilisant directement l'expression trouvée à la question précédente.

Exercice 2

On définit les fonctions ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.
2. Étudier et tracer les fonctions ch et sh.
3. Démontrer que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note Argsh sa bijection réciproque.
4. Justifier que la fonction Argsh est impaire.
5. Montrer que Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

6. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$