1-Trouver toutes les solutions sur $I=\mathbb{R}$ de $(E)\ :\ xy'+y=0$.

2-Trouver toutes les solutions sur $I=\mathbb{R}$ de $(E)\ :\ xy'-y=0$.

3-Donner la méthode pour trouver une solution particulière de $(E)\ :\ y'+2y=(x^2+1)\mathrm{sh}(2x)$ (on ne fera pas le calcul explicite).

4-On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ ay''+by'+cy=0$ où $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3$. Soit $r\in\mathbb{K}$, montrer que $f:x\mapsto e^{rx}$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si r est racine d'un polynôme que l'on précisera.

5-On considère $(E) : ay''+by'+cy=d$ où $(a,b,c,d)\in\mathbb{K}^4$. Donner une solution évidente de (E) dans le cas où $c\neq 0$, puis dans le cas où $c=0$ et $b\neq 0$ et enfin dans le cas où $c=0$, $b=0$ et $a\neq 0$.

1-Trouver toutes les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) \; : \; xy' + y = 0$.

Réponse : • Sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ les solutions sont de la forme : $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

• **Analyse.** Si f est une solution de (E) dérivable sur $\mathbb{R}$, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\mu}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Par continuité de f en 0, on doit avoir :
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$, c'est-à-dire :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\mu}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\lambda}{x} = 0$$

Ceci impose $\lambda = \mu = 0$, ce qui implique que f est la fonction nulle.

- **Synthèse.** La fonction nulle est clairement une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2-Trouver toutes les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ xy' - y = 0.$

Réponse : • Sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ les solutions sont de la forme : $x \mapsto \lambda x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

• **Analyse.** Si f est une solution de (E) dérivable sur $\mathbb{R}$, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \lambda x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mu x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Par continuité de f en 0, on doit avoir :
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$, c'est-à-dire :

$$\lim_{x \to 0^-} \mu x = \lim_{x \to 0^+} \lambda x = 0$$

Ceci est le cas pour tous λ et μ donc cela ne donne aucune condition.

On examine la dérivabilité en 0, on doit avoir :
$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, c'est-à-dire :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\mu x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\lambda x}{x}$$

Ce qui nous donne la condition $\lambda = \mu$. Finalement $f : x \mapsto \lambda x$ définie sur $\mathbb{R}$.

• **Synthèse.** On vérifie immédiatement que $x \mapsto \lambda x$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

3-Donner la méthode pour trouver une solution particulière de $(E)\ :\ y' + 2y = (x^2+1)\mathrm{sh}(2x)$ (on ne fera pas le calcul explicite).

Réponse : • On trouve cherche une solution particulière de $(E_1)\quad y' + 2y = \dfrac{1}{2}(x^2+1)e^{2x}$ sous la forme :

$$y_1 : x \mapsto (\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)e^{2x},\ \text{car } a \neq -k$$

• On trouve cherche une solution particulière de $(E_2)\quad y' + 2y = \dfrac{1}{2}(x^2+1)e^{-2x}$ sous la forme :

$$y_2 : x \mapsto (\alpha_2 x^3 + \beta_2 x^2 + \gamma_2 x + \delta_2)e^{-2x},\ \text{car } a = -k$$

D'après le principe de superposition, une solution particulière de (E) est $y_1 - y_2$.

4-On considère l'équation différentielle (E) : $ay'' + by' + cy = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. Soit $r \in \mathbb{K}$, montrer que $f : x \mapsto e^{rx}$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si r est racine d'un polynôme que l'on précisera.

Réponse : On a :

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \quad & \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad ar^2 + br + c = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad r \text{ est racine du polynôme } aX^2 + bX + c \end{aligned}$$

5-On considère (E) : $ay'' + by' + cy = d$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Donner une solution évidente de (E) dans le cas où $c \neq 0$, puis dans le cas où $c = 0$ et $b \neq 0$ et enfin dans le cas où $c = 0$, $b = 0$ et $a \neq 0$.

Réponse : • Si $c \neq 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{d}{c}$ est solution sur $\mathbb{R}$.

• Si $c = 0$ et $b \neq 0$, l'équation devient : (E) : $ay'' + by' = d$, la fonction $x \mapsto \dfrac{d}{b}x$ convient.

• Si $c = 0$, $b = 0$ et $a \neq 0$, l'équation devient : (E) : $ay'' = d$, la fonction $x \mapsto \dfrac{d}{2a}x^2$ convient.