1-Soient $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $ab|c$, est-il vrai que $a|c$ ou $b|c$?

2-Soient $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $a|bc$, est-il vrai que $a|b$ ou $a|c$?

3-Soient $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $a|c$ et $b|c$, est-il vrai que $ab|c$?

4-Donner la classe de congruence de 2^{41} modulo 7 ?

5-Soit $n \in \mathbb{Z}$ et d un diviseur commun de $2n + 4$ et $3n + 3$. Montrer que $d \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$.

6-Démontrer que $2021^{2021} \equiv -1 \ [2022]$.

7-Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$. On suppose que $a - c|ab + cd$, montrer que $a - c|ad + bc$.

1-Soient $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $ab|c$, est-il vrai que $a|c$ ou $b|c$?

Réponse : C'est toujours vrai. Si $ab|c$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $abk = c$, c'est-à-dire $a(bk) = c$ donc $a|c$. De même $b|c$. Finalement :

$$ab|c \Rightarrow (a|c \text{ et } b|c)$$

2-Soient $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $a|bc$, est-il vrai que $a|b$ ou $a|c$?

Réponse : Ce n'est pas toujours vrai. On a $6|3 \times 4$ pourtant 6 ne divise ni 3 ni 4.

3-Soient $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $a|c$ et $b|c$, est-il vrai que $ab|c$?

Réponse : Ce n'est pas toujours vrai. On a $4|12$ et $6|12$ pourtant 24 ne divise pas 12. On verra que cette implication est vraie lorsque a et b sont premiers entre eux.

4-Donner la classe de congruence de 2^{41} modulo 7 ?

Réponse : On a : $2^3 = 8 \equiv 1\ [7]$. On élève cette congruence à la puissance 13 pour obtenir : $(2^3)^{13} \equiv 1^{13}\ [7]$, c'est-à-dire $2^{39} \equiv 1\ [7]$. Il reste à multiplier par 4 pour obtenir :

$$2^{41} \equiv 4\ [7]$$

5-Soit $n \in \mathbb{Z}$ et d un diviseur commun de $2n+4$ et $3n+3$. Montrer que $d \in \{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$.

Réponse : Si $d|2n+4$ et $d|3n+3$ alors par combinaison $d|3\times(2n+4)-2\times(3n+3)$, c'est-à-dire $d|6$. C'est le résultat attendu.

6-Démontrer que $2021^{2021} \equiv -1\ [2022]$.

Réponse : On a :

$$2021^{2021} \equiv (-1)^{2021} \equiv -1\ [2022]$$

7-Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$. On suppose que $a - c | ab + cd$, montrer que $a - c | ad + bc$.

Réponse : On a : $a - c | ab + cd$ et $a - c | (a - c)(b - d)$, par combinaisons :

$$a - c \Big| \Big(ab + cd - (a - c)(b - d) \Big) = ad + bc$$