

1. Soit (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0, & u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

En examinant les premiers termes, trouver une formule donnant u_n en fonction de n puis la démontrer.

2. En utilisant le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel, démontrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.
3. Par disjonction de cas, trouver tous les réels x tels que : $|x - 2| + x \geq 3$.
4. Existe-t-il a et b deux irrationnels tels que a^b soit rationnel ? On utilisera exclusivement $\sqrt{2}$ qui est le seul nombre dont on a démontré l'irrationalité.

1-Soit (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

En examinant les premiers termes, trouver une formule donnant u_n en fonction de n puis la démontrer.

Réponse : On a $u_2 = 2$, $u_3 = -3$, $u_4 = 4$ et $u_5 = -5$. Ceci suffit à conjecturer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{H}_n : u_n = n \times (-1)^n$$

Démontrons cette formule par récurrence double.

• **Initialisation.** Pour $n = 0$ et $n = 1$, la formule est vérifiée puisque $u_0 = 0$ et $u_1 = -1$.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ sont vraies, c'est-à-dire que $u_n = n(-1)^n$ et $u_{n+1} = (n+1)(-1)^{n+1}$. On a :

$$u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n = -2(n+1)(-1)^{n+1} - n(-1)^n = (-1)^n(2(n+1) - n)$$

En simplifiant, on trouve :

$$u_{n+2} = (-1)^n(n+2) = (-1)^{n+2}(n+2)$$

On a démontré que $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie, ce qui termine la récurrence.

2. En utilisant le fait que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont irrationnels, démontrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Réponse : Par l'absurde si $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a :

$\sqrt{3} = \frac{p}{q} - \sqrt{2}$. On élève au carré :

$$3 = \frac{p^2}{q^2} - 2\sqrt{2}\frac{p}{q} + 2$$

En réorganisant les termes cela donne :

$$\sqrt{2} = \frac{q}{2p} \left(-1 + \frac{p^2}{q^2} \right)$$

C'est absurde car $\sqrt{2}$ est irrationnel.

3. Par disjonction de cas, trouver tous les réels x tels que :

$$|x - 2| + x \geq 3$$

Réponse : Comme dans beaucoup de problèmes qui mettent en jeu une valeur absolue, on peut distinguer différents cas.

- Si $x \geq 2$ alors $x - 2 \geq 0$ donc $|x - 2| = x - 2$. Dans ce cas l'inéquation devient : $(x - 2) + x \geq 3$, c'est-à-dire $x \geq \frac{5}{2}$.
- Si $x < 2$ alors $x - 2 < 0$ donc $|x - 2| = 2 - x$. Dans ce cas l'inéquation devient : $(2 - x) + x \geq 3$, c'est-à-dire $2 \geq 3$. Ceci est contradictoire, pas de solution dans ce cas.

$$\mathcal{S} = \left[\frac{5}{2}, +\infty \right[$$

4. Existe t-il a et b deux irrationnels tels que a^b soit rationnel ?

Réponse : Il y a deux cas à distinguer :

- si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ alors $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$ conviennent.
- sinon $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$, dans ce cas $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ conviennent puisque :

$$a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$