

1 ♡★ Résoudre l'équation $\log_2(x) + \log_x(2) = \frac{5}{2}$ d'inconnue $x \in]1, +\infty[$.

Corrigé : Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on note $t = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$. On a $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \log_2(x) + \log_x(2) = \frac{5}{2} &\Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(2)} + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow t \in \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\} \\ &\Leftrightarrow \ln(x) \in \left\{ \frac{\ln(2)}{2}, 2\ln(2) \right\} \\ &\Leftrightarrow \ln(x) \in \{ \ln(\sqrt{2}), \ln(4) \} \\ &\Leftrightarrow x \in \{ \sqrt{2}, 4 \} \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{ \sqrt{2}, 4 \}$$

2 ★ Résoudre l'équation : $2x \ln(x) + 3(x - 1) = 0$.

Corrigé : On pose $f : x \mapsto 2x \ln(x) + 3(x - 1)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = 2\ln(x) + 2 + 3 = 2\ln(x) + 5$$

La fonction f' s'annule en $e^{-\frac{5}{2}}$, on en déduit que f est strictement décroissante sur $]0, e^{-\frac{5}{2}}[$ et strictement croissante sur $[e^{-\frac{5}{2}}, +\infty[$. De plus, sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, grâce à la stricte monotonie et aux limites connues, on en déduit que f s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$. On constate que $f(1) = 0$ d'où :

$$\mathcal{S} = \{1\}$$

3 ♡ Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}(\ln(x))^3}{x^4}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2(\ln(x^3))^3$.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x (\ln(-x))^2$.

Corrigé : Dans chaque cas, on transforme l'écriture pour faire apparaître des limites qui se calculent avec les résultats usuels de croissances comparées.

1. On a $\frac{e^{2x}(\ln(x))^3}{x^4} = \frac{e^{2x}}{x^4} (\ln(x))^3 = e^x \frac{e^x}{x^4} (\ln(x))^3$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^4} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x))^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}(\ln(x))^3}{x^4} = +\infty$$

2. On a $x^2(\ln(x^3))^3 = x^2(3\ln(x))^3 = 27x^2(\ln(x))^3 = 27\left(x^{\frac{2}{3}}\frac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}})\right)^3$. Or $\lim_{X \rightarrow 0} X \ln(X) = 0$ d'après les résultats usuels de croissances comparées, en appliquant ceci à $X = x^{\frac{2}{3}}$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2(\ln(x^3))^3 = 0$$

3. On a $x^3 e^x (\ln(-x))^2 = x^5 e^x \frac{(\ln(-x))^2}{(-x)^2} = x^5 e^x \left(\frac{\ln(-x)}{-x}\right)^2$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = 0$. On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x (\ln(-x))^2 = 0$$

4 ♡★★

- Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| \leq |t|$.
- En déduire tous les réels x et y tels que :
$$\begin{cases} \sin(x+y) &= 2x \\ \sin(x-y) &= 2y \end{cases}$$

Corrigé :

- La fonction $\sin$ est à valeurs dans $[-1, 1]$, ainsi pour $t \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ l'inégalité est évidente car dans ce cas $|t| \geq 1$.
 - On démontre sans problème, en étudiant la fonction $f : t \mapsto \sin(t) - t$ sur $[0, 1]$, que pour tout $t \in [0, 1]$, $\sin(t) \leq t$ (cette inégalité est d'ailleurs valable sur $\mathbb{R}_+$).
 - Enfin, pour $t \in [-1, 0]$, on a $-t \in [0, 1]$ donc d'après le cas précédent : $\sin(-t) \leq -t$, c'est-à-dire $-\sin(t) \leq -t$ ce qui donne bien $|\sin(t)| \leq |t|$ étant donné que $\sin(t) \leq 0$ et $t \leq 0$ pour $t \in [-1, 0]$. Finalement, on a bien démontré que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| \leq |t|$$

- L'inégalité de la question précédente permet d'écrire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t)^2 \leq t^2$. Pour résoudre le système proposé, on procède par analyse-synthèse en se donnant une solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ du système :

$$4x^2 + 4y^2 = \sin(x+y)^2 + \sin(x-y)^2 \leq (x+y)^2 + (x-y)^2$$

Ce qui est équivalent à :

$$4(x^2 + y^2) \leq 2(x^2 + y^2)$$

On en déduit que $x^2 + y^2 = 0$, ce qui implique $x = y = 0$. La synthèse est évidente, $x = 0$ et $y = 0$ est une solution.

$$\mathcal{S} = \{(0, 0)\}$$

5 ★★★★★

- Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < x < y$, on a : $\frac{y-x}{\ln(y) - \ln(x)} < \frac{x+y}{2}$.
- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{k}{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} < \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}$.

Corrigé :

- L'inégalité à démontrer est équivalente à :

$$2(y-x) < (x+y)(\ln(y) - \ln(x)) \Leftrightarrow 2\left(\frac{y}{x} - 1\right) < \left(1 + \frac{y}{x}\right) \ln\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow 2(t-1) < (1+t) \ln(t) \Leftrightarrow \ln(t) > 2\frac{t-1}{t+1}$$

Ceci en posant $t = \frac{y}{x}$, on a $t > 1$ car $0 < x < y$. On procède par étude de fonction en posant :

$$\begin{aligned} f &: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \ln(t) - 2\frac{t-1}{t+1} \end{aligned}$$

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et :

$$\forall t \in [1, +\infty[, f'(t) = \frac{1}{t} - 2\frac{(t+1) - (t-1)}{(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t+1)^2 - 4t}{t(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}$$

La dérivée est strictement positive sur $]1, +\infty[$, on en déduit que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. De plus $f(1) = 0$ donc f est strictement positive sur $]1, +\infty[$ et on en déduit l'inégalité voulue.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On applique l'inégalité précédente avec $x = k$ et $y = k+1$ et on somme les inégalités pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} = \sum_{k=1}^n k \frac{(k+1) - k}{\ln(k+1) - \ln(k)} < \sum_{k=1}^n k \frac{k + (k+1)}{2} = \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k$$

On utilise les valeurs connues de ces deux sommes :

$$\sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{k}{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} < \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}}$$

6 ★★★ Soient $(a, b, \alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Démontrer que :

$$\alpha a^{\frac{1}{\alpha}} + \beta b^{\frac{1}{\beta}} \geq (\alpha + \beta)(ab)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Étudier le cas d'égalité.

Corrigé : L'inégalité à démontrer se réécrit :

$$\forall (a, b, \alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \alpha e^{\frac{1}{\alpha} \ln(a)} + \beta e^{\frac{1}{\beta} \ln(b)} \geq (\alpha + \beta) e^{\frac{1}{\alpha+\beta} \ln(ab)}$$

Simplifions un peu l'écriture en notant $u = \ln(a)$ et $v = \ln(b)$, l'inégalité à démontrer devient :

$$\alpha e^{\frac{u}{\alpha}} + \beta e^{\frac{v}{\beta}} \geq (\alpha + \beta) e^{\frac{u+v}{\alpha+\beta}}$$

On fixe $u \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et on étudie la fonction :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \alpha e^{\frac{u}{\alpha}} + \beta e^{\frac{v}{\beta}} - (\alpha + \beta) e^{\frac{u+v}{\alpha+\beta}} \end{aligned}$$

Le but est de démontrer que f est positive sur $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ est :

$$\forall v \in \mathbb{R}, f'(v) = e^{\frac{v}{\beta}} - e^{\frac{u+v}{\alpha+\beta}}$$

Par stricte croissance de la fonction exponentielle, on a :

$$f'(v) > 0 \Leftrightarrow \frac{v}{\beta} > \frac{u+v}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \alpha v > \beta u \Leftrightarrow v > \frac{\beta u}{\alpha}$$

On en déduit le tableau des variations de f :

v	$-\infty$	$\frac{\beta u}{\alpha}$	$+\infty$
$f'(v)$		$- \quad 0 \quad +$	
f		$\searrow \quad \nearrow$	

De plus :

$$f\left(\frac{\beta u}{\alpha}\right) = \alpha e^{\frac{u}{\alpha}} + \beta e^{\frac{u}{\alpha}} - (\alpha + \beta) e^{\frac{u + \frac{\beta u}{\alpha}}{\alpha + \beta}} = \alpha e^{\frac{u}{\alpha}} + \beta e^{\frac{u}{\alpha}} - (\alpha + \beta) e^{\frac{u}{\alpha}} = 0$$

On en déduit que pour tout $v \in \mathbb{R}$, $f(v) \geq 0$, d'où l'inégalité demandée.

D'après l'étude précédente, il y a égalité dans l'inégalité si et seulement si $v = \frac{\beta u}{\alpha}$. Explicitons cette condition :

$$v = \frac{\beta u}{\alpha} \Leftrightarrow \ln(b) = \frac{\beta}{\alpha} \ln(a) \Leftrightarrow \alpha \ln(b) = \beta \ln(a) \Leftrightarrow b^\alpha = a^\beta$$

7 ♥★★ Trouver tous les réels x tels que : $2^{4 \cos^2(x)+1} + 16 \times 2^{4 \sin^2(x)-3} = 20$.

Corrigé : Soit $x \in \mathbb{R}$, on procède par équivalences :

$$\begin{aligned}
 2^{4 \cos^2(x)+1} + 16 \times 2^{4 \sin^2(x)-3} = 20 &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2(x)+1} + 16 \times 2^{1-4 \cos^2(x)} = 20 \\
 &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2(x)} - 10 + 16 \times 2^{-4 \cos^2(x)} = 0 \quad (\text{on a divisé par } 2) \\
 &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2(x)} - 10 + \frac{16}{2^{4 \cos^2(x)}} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(2^{4 \cos^2(x)}\right)^2 - 10 \times 2^{4 \cos^2(x)} + 16 = 0 \quad (\text{on a multiplié par } 2^{4 \cos^2(x)}) \\
 &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2(x)} \text{ est solution de l'équation } X^2 - 10X + 16 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2(x)} = 2 \text{ ou } 2^{4 \cos^2(x)} = 8 \\
 &\Leftrightarrow 4 \cos^2(x) = 1 \text{ ou } 4 \cos^2(x) = 3 \\
 &\Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} [2\pi] \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \text{ ou} \\
 &\quad x = \frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} [2\pi] \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} [2\pi] \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} \left[\frac{\pi}{2}\right]
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$