1-On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = -u_n$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

2-Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2} u_n$. Exprimer u_n en fonction de n.

3-Vrai ou faux : si la suite complexe (z_n) converge vers l, la suite $(\overline{z_n})$ converge vers $\overline{l}$.

4-Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$.

5-Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Montrer que la suite (z^n) est divergente.

6-Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k)}{2^k}$.

1-On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = -u_n$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Réponse : L'équation caractéristique s'écrit : $X^2 + 1 = 0$, les solutions sont $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Ainsi, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \beta \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Les conditions initiales permettent de trouver $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

2-Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2} u_n$. Exprimer u_n en fonction de n.

Réponse : On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n \ : \ u_n = \frac{n!}{2^{n-1}}$$

- On vérifie que $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour un entier naturel n fixé. On a :

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{2} u_n = \frac{n+1}{2} \times \frac{n!}{2^{n-1}} = \frac{(n+1)!}{2^n}$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence.

3-Vrai ou faux : si la suite complexe (z_n) converge vers l, la suite $(\overline{z_n})$ converge vers $\overline{l}$.

Réponse : Par définition de la convergence :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |z_n - l| \leq \varepsilon$$

Comme le module d'un complexe est égal au module du conjugué, c'est équivalent à :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |\overline{z_n} - \overline{l}| \leq \varepsilon$$

Ce qui justifie que $(\overline{z_n})$ converge vers $\overline{l}$.

4-Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(1+i)^n}{2^n}$.

Réponse : On étudie le module de la suite. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\frac{(1+i)^n}{2^n}\right| = \frac{(\sqrt{2})^n}{2^n} = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(1+i)^n}{2^n} = 0$.

5-Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Montrer que la suite (z^n) est divergente.

Réponse : Par l'absurde, si (z^n) converge vers $l \in \mathbb{C}$ alors les suites extraites (z^{2n}) et (z^{2n+1}) tendent également vers l. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$z^{2n+1} = z \times z^{2n}$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a : $l = z \times l$. Or $z \neq 1$, ainsi $l = 0$. C'est absurde car la suite (z^n) a tous ses termes de module 1, elle ne peut pas tendre vers 0.
On en déduit que (z^n) diverge.

6-Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k)}{2^k}$.

Réponse : Soit $n \in \mathbb{N}$, on va déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ik}}{2^k}$ puis prendre la partie réelle de cette limite : en effet la partie réelle de la limite est égale à la limite de la partie réelle.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ik}}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^i}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{e^i}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^i}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\frac{e^i}{2}}$$

On a utilisé le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{e^i}{2}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{e^i}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

On a :

$$\frac{1}{1-\frac{e^i}{2}} = \frac{2}{2-\cos(1)-i\sin(1)} = \frac{4-2\cos(1)+i2\sin(1)}{5-4\cos(1)}$$

Il reste à prendre la partie réelle pour en conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k)}{2^k} = \frac{4-2\cos(1)}{5-4\cos(1)}$$