Exercice

Comme $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation se réécrit :

$$(E) \ : \ y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{\text{Arctan}(x)}{x}$$

L'équation homogène associée est :

$$(EH) \ : \ y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0$$

La fonction $a : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et une primitive de a sur $\mathbb{R}_+^*$ est $A : x \mapsto \ln(x)$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$y(x) = \lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation homogène sont :

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{cccc} y & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\lambda}{x} \end{array} , \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Pour trouver une solution particulière de (E), on applique la méthode de la variation de la constante en cherchant une solution particulière sous la forme $y_0 : x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ avec λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ y_0'(x) = \frac{\lambda'(x)x - \lambda(x)}{x^2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y_0 \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ y_0'(x) + \frac{1}{x}y_0(x) = \frac{\text{Arctan}(x)}{x} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{\lambda'(x)x - \lambda(x)}{x^2} + \frac{\lambda(x)}{x^2} = \frac{\text{Arctan}(x)}{x} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{\lambda'(x)}{x} = \frac{\text{Arctan}(x)}{x} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \lambda'(x) = \text{Arctan}(x) \end{aligned}$$

Il reste à donner une primitive de la fonction Arctan, pour cela on utilise une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & 1 & & u(x) & = & x \\ v(x) & = & \text{Arctan}(x) & & v'(x) & = & \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\int \text{Arctan}(x)dx = x\text{Arctan}(x) - \int \frac{x}{x^2+1}dx = x\text{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Ainsi on peut choisir $\lambda(x) = x\text{Arctan}(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ et par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ y_0(x) = \text{Arctan}(x) - \frac{1}{2x}\ln(x^2+1)$$

Finalement l'ensemble des solutions de (E) :

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{cccc} y & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\lambda}{x} + \operatorname{Arctan}(x) - \dfrac{1}{2x}\ln(x^2+1) \end{array} , \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Problème 1 : Deux formules pour le calcul intégral

A-Propriété du Roi

1. (a) On effectue le changement de variable $x = a + b - t$ ce qui équivaut à $t = a + b - x$ qui est bien un changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$.
On a : $dx = -dt$. On remarque enfin que les bornes sont échangées, ainsi :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_b^a f(a + b - x)(-dx) = \int_a^b f(a + b - x)dx$$

La variable d'intégration étant muette, on a bien la formule annoncée :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(a + b - t)dt}$$

(b) La fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ ainsi elle possède une primitive, que l'on note F, sur cet intervalle. D'une part :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

D'autre part, une primitive sur $[a, b]$ de $g : t \mapsto f(a + b - t)$ est $G : t \mapsto -F(a + b - t)$ ce que l'on voit immédiatement en calculant G'. Ainsi :

$$\int_a^b f(a + b - t)dt = [G(t)]_a^b = [-F(a + b - t)]_a^b = -F(a + b - b) + F(a + b - a) = F(b) - F(a)$$

Et l'on retrouve l'égalité entre ces deux intégrales.

2. (a) Remarquons avant tout que $f \circ \cos$ et $f \circ \sin$ sont bien définies et continues sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ car cos et sin prennent leurs valeurs dans $[0, 1]$ sur cet intervalle et f définie et continue sur $[0, 1]$. Ce qui permet d'affirmer l'existence des intégrales mises en jeu. Ensuite, nous utilisons la propriété du Roi :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big)\Big)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(x))dx$$

ceci car : $\forall a \in \mathbb{R},\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$.

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(x))dx}$$

(b) i. On applique la propriété du Roi avec la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\tan(x)^{2025}}$ qui est bien continue sur $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$ sachant qu'ici $a+b = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$. On a :

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan(x)^{2025}} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{2025}} dx$$

Or pour tout $x \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$, on a :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

Ce qui donne :

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\frac{1}{\tan(x)^{2025}}} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(x)^{2025}}{1+\tan(x)^{2025}} dx = J$$

ii. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I + J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan(x)^{2025}}{1+\tan(x)^{2025}} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 1 dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

iii. Finalement $I = J$ et $I + J = \dfrac{\pi}{6}$. Ce qui donne immédiatement :

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan(x)^{2025}} dx = \frac{\pi}{12}}$$

(c) On applique, de même, la propriété du Roi, la fonction mise en jeu étant bien définie et continue sur l'intervalle d'intégration. On a :

$$I = \int_{-3}^{3} \frac{1+x^2}{1+2^x} dx = \int_{-3}^{3} \frac{1+x^2}{1+2^{-x}} dx$$

Ceci en sachant qu'ici $a+b-x = -3+3-x = -x$. En sommant les deux formes obtenues ci-dessus, nous avons :

$$2I = \int_{-3}^{3} (1+x^2)\Big(\frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+2^{-x}}\Big) dx = \int_{-3}^{3} (1+x^2) dx = \Big[x - \frac{1}{3}x^3\Big]_{-3}^{3} = 24$$

On en déduit que :

$$\boxed{\int_{-3}^{3} \frac{1+x^2}{1+2^x} dx = 12}$$

(d) On applique encore la propriété du Roi, la fonction mise en jeu étant continue sur l'intervalle d'intégration. Cela donne en utilisant l'imparité et la 2π-périodicité de sin :

$$I = \int_0^{2\pi} \sin(\sin(x)-x) dx = \int_0^{2\pi} \sin(\sin(2\pi-x)-(2\pi-x)) dx = \int_0^{2\pi} \sin(\sin(-x)+x) dx = -\int_0^{2\pi} \sin(\sin(x)-x) dx = -I$$

On en déduit que :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sin(\sin(x)-x) dx = 0}$$

B-Intégrale et bijection réciproque

1. (a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[a,b]$ (car $f'>0$) d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[a,b]$ dans $[f(a),f(b)]$. Sa bijection réciproque est définie sur $[f(a),f(b)]$ et à valeurs dans $[a,b]$.

   (b) De plus, f^{-1} est continue sur $[f(a),f(b)]$ en tant que bijection réciproque d'une fonction continue. On en déduit que $\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt$ existe.

   (c) La fonction f est dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $[a,b]$. On en déduit que f^{-1} est dérivable sur $[a,b]$. Dans ce cas, on sait que $(f^{-1})'=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$ est continue comme composée de fonctions continues, ainsi f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.
   On pose $u=f^{-1}(t)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[f(a),f(b)]$. On a $du=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(t))}dt$, ce qui donne $f'(u)du=dt$.
   En tenant compte de la modification des bornes, nous avons :

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt=\int_a^b uf'(u)du$$

   (d) Avec la relation précédente, en sommant :

$$\int_a^b f(t)dt+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_a^b tf'(t)dt=\int_a^b (f(t)+tf'(t))dt=[tf(t)]_a^b=bf(b)-af(a)$$

   Ce qui démontre bien la propriété annoncée :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt=bf(b)-af(a)}$$

2. (a) La fonction f est bien continue et dérivable sur $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$ car c'est une fonction puissance usuelle.
   De plus :

$$\forall t\in[a,b],\ \ f'(t)=\alpha t^{\alpha-1}>0$$

   Enfin, f' étant bien continue, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. On a immédiatement $f^{-1}:t\mapsto t^{\frac{1}{\alpha}}$ définie sur $[a^\alpha,b^\alpha]$.

   (b) Avec les notations de la question précédente, nous avons :

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b t^\alpha dt=\left[\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\right]_a^b=\frac{1}{\alpha+1}\left(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}\right)$$

   D'autre part :

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt=\int_{a^\alpha}^{b^\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}}dt=\left[\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+1}t^{\frac{1}{\alpha}+1}\right]_{a^\alpha}^{b^\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha+1}\left(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}\right)$$

   On en déduit que :

$$\int_a^b f(t)dt+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt=b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}=bf(b)-af(a)$$

   La formule est ainsi vérifiée dans le cas de cet exemple simple.

3. (a) i. Ici, on doit tenir compte de la remarque sur la modification des hypothèses de l'énoncé. La fonction $f : t \mapsto \sqrt{\tan(t)}$ est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ comme composée de deux fonctions usuelles continues et strictement croissantes.
Ainsi f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ vers $\left[f(0), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = [0, 1]$.
Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et $y \in [0, 1]$, on a :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{\tan(x)} \Leftrightarrow y^2 = \tan(x) \Leftrightarrow x = \mathrm{Arctan}(y^2)$$

En effet : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ \mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x$.
On en déduit que f vérifie les hypothèses du théorème et :

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f^{-1} & : & [0,1] & \to & \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ & & t & \mapsto & \mathrm{Arctan}(t^2) \end{array}}$$

ii. Grâce à la question précédente, nous pouvons appliquer le théorème :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(t)}dt + \int_0^1 \mathrm{Arctan}(t^2)dt = \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0f(0) = \frac{\pi}{4}$$

On en déduit que :

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \mathrm{Arctan}(t^2)dt}$$

iii. Effectuons une intégration par parties sur la nouvelle intégrale obtenue à la question précédente.
On pose :

$$u'(t) = 1 \qquad u(t) = t$$
$$v(t) = \mathrm{Arctan}(t^2) \quad v'(t) = \frac{2t}{1+t^4}$$

Les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $[0, 1]$. Nous obtenons :

$$\int_0^1 \mathrm{Arctan}(t^2)dt = \Big[t\mathrm{Arctan}(t^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^4}dt = \frac{\pi}{4} - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}dt$$

En injectant ceci dans la formule de la question précédente, nous avons directement :

$$\boxed{I = 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}dt}$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$, on fait apparaitre une identité remarquable :

$$t^4 + 1 = t^4 + 2t^2 + 1 - 2t^2 = (t^2+1)^2 - 2t^2 = (t^2 + \sqrt{2}t + 1)(t^2 - \sqrt{2}t + 1)$$

(c) Pour $t \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on réduit au même dénominateur :

$$\frac{at+b}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} + \frac{ct+d}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} = \frac{(at+b)(t^2 + \sqrt{2}t + 1) + (ct+d)(t^2 - \sqrt{2}t + 1)}{t^4 + 1}$$

On identifie les deux numérateurs en développant :

$$t^2 = (a+c)t^3 + ((a-c)\sqrt{2} + (b+d))t^2 + ((a+c) + (b-d)\sqrt{2})t + (b+d)$$

Ce qui nous donne le système :

$$\begin{cases} a+c & = & 0 \\ (a-c)\sqrt{2} + (b+d) & = & 1 \\ (a+c) + (b-d)\sqrt{2} & = & 0 \\ b+d & = & 0 \end{cases}$$

On résout ce système sans problème :

$$\begin{cases} a & = & \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ b & = & 0 \\ c & = & -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ d & = & 0 \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^2}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1}\Big)}$$

(d) On effectue le changement de variable $u = -t$ qui est bien un changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On a $du = -dt$. On obtient :

$$\int_0^1 \frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt = \int_0^{-1} \frac{-u}{u^2-\sqrt{2}u+1}(-du) = \int_0^{-1} \frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}du$$

La variable d'intégration étant muette, on a bien :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt = \int_0^{-1} \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt}$$

(e) D'après les questions précédentes, nous avons :

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\int_0^1 \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt - \int_0^1 \frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt\Big) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\int_0^1 \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt - \int_0^{-1} \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt\Big) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\int_0^1 \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt + \int_{-1}^{0} \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt\Big) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^1 \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt \end{aligned}$$

Ceci en appliquant la relation de Chasles. On a bien :

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^1 \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt}$$

(f) Il reste à calculer cette dernière intégrale en transformant l'expression, comme vu en cours. Pour $t \in [-1,1]$:

$$\frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1} = \frac{1}{2}\times\frac{2t}{t^2-\sqrt{2}t+1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\frac{\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\Big)$$

- La première partie s'intègre en $t \mapsto \ln(t^2-\sqrt{2}t+1)$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2-\sqrt{2}t+1>0$ puisque le discriminant est strictement négatif.
- On transforme la seconde fraction, en ignorant pour l'instant le numérateur :

$$\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1} = \frac{1}{(t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{(t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}$$

Ce qui s'intègre en $t \mapsto \sqrt{2}\text{Arctan}(\sqrt{2}t-1)$.
Finalement, en tenant compte de tous les coefficients, on a :

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\times\Big(\Big[\ln(t^2-\sqrt{2}t+1)\Big]_{-1}^{1}+\Big[2\text{Arctan}(\sqrt{2}t-1)\Big]_{-1}^{1}\Big) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\ln(2-\sqrt{2})-\ln(2+\sqrt{2})+2\text{Arctan}(\sqrt{2}-1)+2\text{Arctan}(\sqrt{2}+1)\Big) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\Big(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\Big)+\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\text{Arctan}(\sqrt{2}-1)+\text{Arctan}(\sqrt{2}+1)\Big)}$$

(g) Pour simplifier tout cela, il faut remarquer que :

- $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = (\sqrt{2}-1)^2$ en multipliant par la quantité conjuguée.
- De même, on vérifie que $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$ et d'après le cours :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \text{Arctan}(x)+\text{Arctan}\Big(\frac{1}{x}\Big) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, en reprenant la question précédente, on a :

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\ln(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{2}\Big)}$$

Problème 2 : Réciproque de la fonction th

Partie 1 : Étude de Argth

1. On sait que la fonction th est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{th réalise une bijection strictement croissante de } \mathbb{R} \text{ dans }]-1,1[}$$

2. • On sait que la fonction th est impaire, ainsi Argth est impaire comme bijection réciproque d'une fonction impaire. On remarque également que Argth est définie sur $]-1,1[$ qui est bien un intervalle symétrique par rapport à 0.

   • La fonction Argth est également continue et strictement croissante sur $]-1,1[$ en tant que bijection réciproque de th qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   • Les limites de Argth en -1 et 1 se déduisent de celles de th en $-\infty$ et $+\infty$. On a donc :

$$\lim_{x\to-1} \mathrm{Argth}(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 1} \mathrm{Argth}(x) = +\infty$$

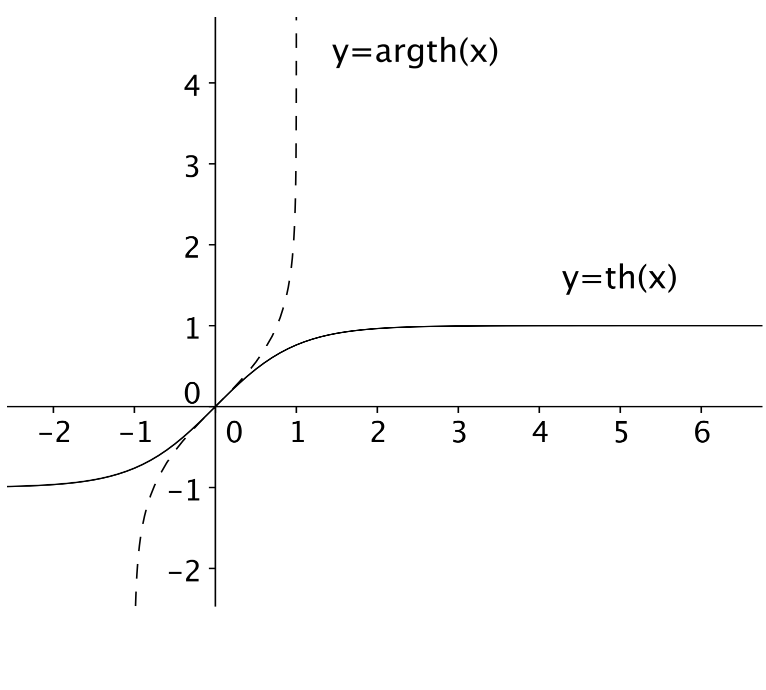
   • Nous allons utiliser le théorème relatif à la dérivation d'une bijection réciproque. La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. D'autre part, la dérivée de th qui est égale à $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit que Argth est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\mathrm{Argth}'(x) = \frac{1}{\mathrm{th}'(\mathrm{Argth}(x))} = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2(\mathrm{Argth}(x))} = \frac{1}{1-x^2}$$

   Ceci en utilisant la dérivée de th et le fait que pour tout $x \in]-1,1[$, $\mathrm{th}(\mathrm{Argth}(x)) = x$ puisque ces deux fonctions sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}}$$

   • La courbe représentative de Argth est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ à la courbe représentative de la fonction th.



3. On applique la méthode usuelle pour expliciter une bijection réciproque. On va notamment utiliser le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1, 1[$. On a :

$$\begin{aligned}
y = \mathrm{th}(x) &\Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
&\Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
&\Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad \text{en multipliant numérateur et dénominateur par } e^x \\
&\Leftrightarrow y(e^{2x} + 1) = e^{2x} - 1 \\
&\Leftrightarrow e^{2x}(y - 1) = -1 - y \\
&\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y} \\
&\Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \ \mathrm{Argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)}$$

À l'aide de cette nouvelle expression, on peut retrouver la dérivée de Argth.

Partie 2 : Une équation fonctionnelle

1. (a) Soit f une fonction constante sur $\mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$. Déjà, f est dérivable en 0. Il reste à voir quand la relation est vérifiée :

$$\begin{aligned}
f \text{ vérifie } (\bigstar) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \ k = \frac{2k}{1 + k^2} \\
&\Leftrightarrow k + k^3 = 2k \\
&\Leftrightarrow k(k^2 - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow k = 0 \text{ ou } k = 1 \text{ ou } k = -1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les fonctions constantes solutions sont égales à } 0, \ -1 \text{ ou } 1}$$

(b) Déjà, la fonction th est bien dérivable en 0. On va utiliser la formule vue en cours qui se déduit de la définition de th :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(2x) = \frac{2\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{th}(x)^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{th}(2x)(1+\mathrm{th}(x)^2) = 2\mathrm{th}(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\Big(1+\Big(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\Big)^2\Big) = 2\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\Big(1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{e^{2x}+2+e^{-2x}}\Big) = 2\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\Big(2\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2}\Big) = 2\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \\
&\Leftrightarrow \quad (e^{2x}-e^{-2x})\frac{1}{e^x+e^{-x}} = e^x - e^{-x} \\
&\Leftrightarrow \quad e^{2x}-e^{-2x} = (e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est vérifiée, c'est une identité remarquable. On en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(2x) = \frac{2\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{th}(x)^2}}$$

Par suite, la fonction th vérifie (★).

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, déjà la fonction f_λ est bien dérivable en 0 car f est dérivable en 0. On va appliquer la relation (★) à la fonction f en λx avec $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2\lambda x) = \frac{2f(\lambda x)}{1+f(\lambda x)^2}$$

Ainsi la fonction f_λ vérifie la même relation.

$$\boxed{\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R},\ f_\lambda \text{ vérifie la relation } (\bigstar)}$$

(d) On se donne f qui vérifie (★). Déjà, la fonction $-f$ est dérivable en 0 car f est dérivable en 0 et en multipliant la relation (★) par -1, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f(x) = -\frac{2f(x)}{1+f(x)^2} = \frac{2(-f(x))}{1+(-f(x))^2}$$

$$\boxed{-f \text{ vérifie } (\bigstar)}$$

2. On applique la relation en 0 pour obtenir : $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1+f(0)^2}$. On résout cette équation comme dans la question 1.(a) pour obtenir 3 possibilités :

$$\boxed{f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = -1 \text{ ou } f(0) = 1}$$

3. On suit l'indication de l'énoncé en appliquant (★) à $\dfrac{x}{2}$ pour obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+f\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, démontrons par équivalences que $f(x) \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+f\left(\frac{x}{2}\right)^2} - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - f\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1+f\left(\frac{x}{2}\right)^2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\left(f\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, la première l'est également.

Pour l'autre partie de l'inégalité à démontrer, on applique ce qui précède à la fonction $-f$ qui est également solution du problème d'après la question 1.(d). On obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-f(x) \leq 1$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq f(x)$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq f(x) \leq 1}$$

4. (a) La fonction f est supposée non constante donc :

$$\boxed{\exists x_0 \in \mathbb{R},\ f(x_0) \neq f(0)}$$

(b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_0}{2^n} = 0$, or f est dérivable en 0 donc continue en 0. Ainsi par définition de la continuité, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = f(0) = 1}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on applique la relation (★) en $\dfrac{x_0}{2^{n+1}}$ pour obtenir :

$$f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = \frac{2f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)}{1+f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)^2}$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$$

Le dénominateur $1+u_{n+1}^2$ étant strictement positif, on sait que u_n et u_{n+1} sont de même signe. Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite (u_n) est de signe constant.

Pour obtenir une contradiction, on va distinguer 3 cas selon le signe de u_0 :

• si $u_0 = 0$ alors par une récurrence immédiate, on démontre que (u_n) est la suite nulle. Ceci est contradictoire avec le résultat de la question précédente : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

• si $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) est strictement positive d'après la première partie de cette question. D'autre part, en remarquant que $u_{n+1} = f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) \leq 1$ d'après la question 3, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+u_n^2}{2} \leq 1$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ et en conclusion (u_n) décroit.
On a ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0$ et en passant à la limite dans cette inégalité cela donne $1 \leq u_0$. Mais d'autre part, $u_0 = f(x_0) \leq 1$ donc $f(x_0) = 1 = f(0)$: c'est absurde par définition de x_0.

• Enfin, dans le cas où $u_0 < 0$, la suite (u_n) reste de signe négatif, c'est contradictoire avec $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Finalement l'hypothèse $f(0) = 1$ est absurde donc :

$$\boxed{f(0) \neq 1}$$

(d) On suppose que f est solution du problème avec $f(0) = -1$. D'après la question 1.(d), la fonction $-f$ est solution du problème et on a $f(0) = 1$ ce qui nous ramène à l'étude précédente. On en déduit que $f(0) \neq -1$.

$$\boxed{\text{On a nécessairement } f(0) = 0}$$

5. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 1$. On suit la démarche de la question 4., en posant pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$. On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = f(0) = 0$ par continuité de f. D'autre part, comme dans la question 4.(b), on a la relation qui se déduit de $(\bigstar)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$. Grâce à cette relation, nous pouvons démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\mathcal{H}_n\ :\ "u_n = 1"$$

• **Initialisation**. On a $u_0 = f(x) = 1$ par hypothèse.

• **Hérédité**. On suppose que $u_n = 1$ pour un certain entier naturel $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a $u_n = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$ et sachant que $u_n = 1$ cela donne $1+u_{n+1}^2 = 2u_{n+1}$ ou encore $(u_{n+1}-1)^2 = 0$. On en déduit que $u_{n+1} = 1$, ce qui termine la récurrence.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$. C'est contradictoire avec $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 1$.

On démontre de même que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq -1$ puisque si f est solution du problème alors $-f$ aussi, ce qui nous ramène au cas précédent.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 1 \text{ et } f(x) \neq -1}$$

6. (a) D'après la question 3., on sait que pour tout $x \in \mathbb{R},\ -1 \leq f(x) \leq 1$. D'autre part, d'après la question précédente, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 1$ et $f(x) \neq -1$. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R},\ -1 < f(x) < 1$, or la fonction Argth est définie sur $]-1,1[$ d'après l'étude menée dans la première partie.

$$\boxed{g \text{ est bien définie}}$$

(b) On procède par équivalences, soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(2x) = 2g(x) &\Leftrightarrow \operatorname{Argth}(f(2x)) = 2\operatorname{Argth}(f(x)) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{th}(\operatorname{Argth}(f(2x))) = \operatorname{th}(2\operatorname{Argth}(f(x))) \quad \text{th étant une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans }]-1,1[\\ &\Leftrightarrow f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f(x)^2} \quad \text{car th vérifie } (\bigstar) \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie car f vérifie $(\bigstar)$. On en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2g(x)}$$

(c) On sait que f est dérivable en 0 par hypothèse. D'autre part, Argth est dérivable en $f(0)$ car Argth est dérivable sur son ensemble de définition. Par composition, g est dérivable en 0.

$$\boxed{g \text{ est dérivable en } 0}$$

7. (a) On sait que la fonction g est dérivable en 0 avec $g'(0) = a$ donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(h)-g(0)}{h-0} = a$. Or $g(0) = \operatorname{Argth}(f(0)) = \operatorname{Argth}(0) = 0$ car on a supposé que $f(0) = 0$. Ainsi $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(h)}{h} = a$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$ donc par composition de limites :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = a}$$

(b) Étant donné que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(2x) = 2g(x)$ d'après la question 6.(b), on peut démontrer par une récurrence rapide à partir de cette relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} g(x)$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{g(x)}{x}$. La suite (v_n) est une suite constante, elle converge donc vers $\dfrac{g(x)}{x}$. Mais, d'après la question précédente, on sait aussi qu'elle converge vers a. On en déduit que $\dfrac{g(x)}{x} = a$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = ax}$$

en effet cette relation est valable sur $\mathbb{R}^*$ et également en 0 car $g(0) = 0$.
Ce qui prouve bien que g est linéaire.

(c) Comme th et Argth sont des bijections réciproques l'une de l'autre, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = \mathrm{th}(\mathrm{Argth}(f(x))) = \mathrm{th}(g(x)) = \mathrm{th}(ax)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{th}(ax)}$$

8. Il reste à faire la synthèse des questions précédentes.
   - Pour $a \in \mathbb{R}$, les fonctions $x \mapsto \mathrm{th}(ax)$ sont solutions du problème d'après la question 1.
   - Enfin les fonctions constantes égales à 1 et à -1 sont clairement solutions.

   En conclusion, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{x \mapsto \mathrm{th}(ax),\ a \in \mathbb{R}\right\} \cup \{-1, 1\}}$$